

Vibraciones en entramados utilizando series de potencias con teoría de viga de Timoshenko

Vibrations in trusses using power series with Timoshenko's beam theory

Presentación 30/10/2025

Marcos Pereson

Grupo de Diseño Mecánico (GRUDIM), Facultad Regional Reconquista, UTN, Calle 44 1000, Reconquista, Argentina.

E-mail de contacto: mpereson1700@comunidad.frrq.utn.edu.ar

Macarena Caballero

Grupo de Diseño Mecánico (GRUDIM), Facultad Regional Reconquista, UTN, Calle 44 1000, Reconquista, Argentina.

E-mail de contacto: mcaballero902480@comunidad.frrq.utn.edu.ar

Tiago Speranza

Grupo de Diseño Mecánico (GRUDIM), Facultad Regional Reconquista, UTN, Calle 44 1000, Reconquista, Argentina.

E-mail de contacto: tsperanza3215@comunidad.frrq.utn.edu.ar

Resumen

El objetivo de este trabajo es hallar las frecuencias naturales de vibración de un entramado plano aplicando la teoría de viga de Timoshenko, la cual considera los efectos de la inercia rotacional y de la deformación por corte; factores ausentes en la teoría clásica de Bernoulli-Euler. Se plantea la formulación energética del sistema a partir del principio de Hamilton y el cálculo variacional, describiendo la energía interna y cinética de cada barra y se resuelve las ecuaciones de vibración mediante el método de series de potencias. Los resultados evidencian que esta metodología constituye una herramienta sólida y flexible para el análisis dinámico y el modelado estructural.

Palabras clave: Vibraciones, Timoshenko, Series de Potencia, Entramados Planos.

Abstract

The objective of this work is to find the natural vibration frequencies of a flat truss by applying Timoshenko's beam theory, which considers the effects of rotational inertia and shear deformation; factors absent in the classical Bernoulli-Euler theory. The energy formulation of the system is based on Hamilton's principle and variational calculus, describing the internal and kinetic energy of each bar, and the vibration equations are solved using the power series method. The results show that this methodology is a robust and flexible tool for dynamic analysis and structural modeling.

Keywords: Vibrations, Plane Frame, Power Series, Timoshenko

1. Introducción

La teoría clásica de Bernulli-Euler supone que las deformaciones elásticas se deben únicamente a la flexión, sin considerar los efectos de la inercia rotatoria ni los esfuerzos cortantes; lo cual es válido en problemas habituales de ingeniería, pero puede generar errores en vigas cortas y gruesas o sometidas a grandes esfuerzos.

Para dichos casos donde se deba tomar en consideración el efecto debido al corte se utiliza la Teoría de Timoshenko, que incluye los efectos debido a la inercia rotatoria (relacionado al tiempo de adecuación de la viga al cambio de esfuerzos) y a la deformación transversal por corte; con el fin de hallar las frecuencias naturales de vibración. Para obtener soluciones más precisas, se resuelve la ecuación de vibración utilizando el método de series de potencias. Esta técnica permite abordar ecuaciones diferenciales con coeficientes variables. Este desarrollo proporciona una expresión general para los modos de vibración, truncable según la precisión deseada, y permite analizar la influencia relativa de los distintos términos físicos del modelo de Timoshenko.

2. Metodología

2.1 Formulación de la energía interna y cinética método de viga de Timoshenko

2.1.1 Hipótesis básicas y expresiones de energía de deformación

Las hipótesis fueron desarrolladas en la década de 1920 por Stephen Timoshenko, se trata de un modelo matemático que describe la vibración transversal de las vigas teniendo en cuenta el efecto de la deformación por corte. El material del elemento cumple la ley de elasticidad de Hooke, es homogéneo, isotrópico y lineal elástico.

Se considera una viga de longitud “a” sobre un eje “x”, sujeta a cargas distribuidas $q(x)$ dirigidas transversalmente sobre su eje longitudinal; a cargas distribuidas $p(x)$ dirigidas a lo largo del eje, como se muestra en la Figura 1.

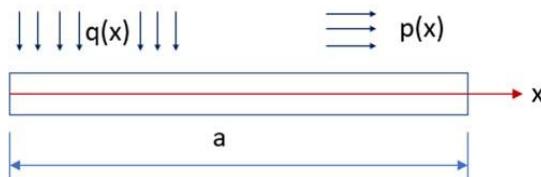


Figura 1 - Viga de longitud "a" y cargas distribuidas

En la Figura 2 se indica el sistema de coordenadas adoptado, las funciones de desplazamientos son $u(x)$, $v(x)$ y $w(x)$; para las direcciones en los ejes “x”, “y” y “z” respectivamente. En general, siguiendo la teoría de Saint-Venant, se puede considerar que los desplazamientos $w(x)$, son nulos.

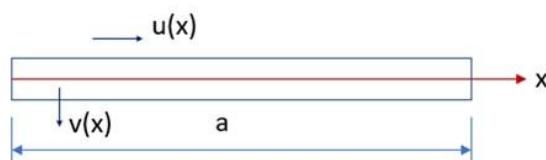


Figura 2 - Representación de desplazamientos

Las deformaciones vertical y axial de un punto del eje de la viga dependen solo de la variable x. Las secciones normales se conservan planas tras la deformación, pero no necesariamente perpendiculares, sino que giran un ángulo adicional ψ , como se muestra en la Figura 3.

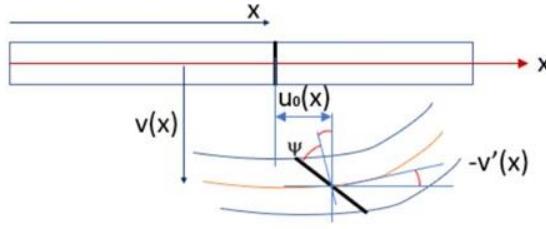


Figura 3 - Ángulo adicional de rotación de cara plana

De las hipótesis que se acaban de formular, se deduce que una sección recta a la distancia x , de la base izquierda, sufre una reducción $v(x) = v_0(x)$ igual para todos los puntos de la sección, un desplazamiento axial $u(x,y)$ y una rotación $\phi(x)$ como se muestra en la Figura 4.

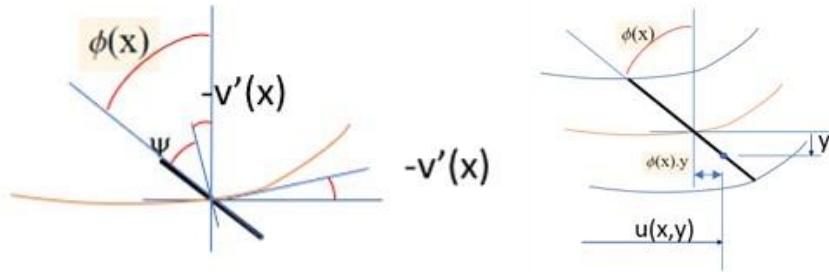


Figura 4 - Rotación de sección (a) y desplazamiento de un punto de la sección(b)

Las deformaciones se deducen de las leyes que relacionan deformaciones con las primeras derivadas de los desplazamientos, y tras algunos pasos se obtiene la expresión de la energía como suma de los desplazamientos axiales, transversales y al corte.

$$U = \frac{1}{2} \left[\int_0^L E F (u'_0(x))^2 dx + \int_0^L E J (\phi'(x))^2 dx + \int_0^L G F \kappa (\psi(x))^2 dx \right] \quad (1)$$

2.1.2 Energía cinética

La energía cinética en un sistema de referencia cartesiana (x, y, z) , relativa a un cuerpo de volumen S es:

$$K = \frac{1}{2} \rho \int_S (u_0(x) + \phi(x)y)^2 + \dot{v}(x)^2 dV \quad (2)$$

Donde la terna $\{\dot{u}, \dot{v}, \dot{w}\}$ son las derivadas respecto al tiempo de los desplazamientos en cada dirección. Debido a que todo el análisis es en el plano del entramado, no hay desplazamientos en la dirección “z” entonces $\dot{w}(x) = 0$

Observando los tres términos de la ecuación (2) podemos concluir que la energía cinética se compone de tres partes, la primera es la energía cinética axial K_a , la segunda de tipo transversal K_e y la tercera de tipo rotacional K_r :

$$K_a = \frac{1}{2} \int_0^L \rho F (u_0(x))^2 dx \quad (3)$$

$$K_e = \frac{1}{2} \int_0^L \rho F (\dot{v}(x))^2 dx \quad (4)$$

$$K_r = \frac{1}{2} \int_0^L \rho J (\dot{\phi}(x))^2 dx \quad (5)$$

2.1.3 Vibraciones transversales de la viga de Timoshenko

Teniendo en cuenta ecuación de la energía de deformación (1), y las ecuaciones relacionadas con la energía cinética. La suma de los componentes representa el Lagrangiano de este sistema:

$$L = K_a + K_e + K_r - U \quad (6)$$

Y la densidad lagrangiana tendrá la siguiente forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\rho F \dot{v}^2 + \rho J \dot{\phi}^2 - EJ \phi'^2 - GF_s(v' + \phi) + EFu'^2] \quad (7)$$

2.2 Estudio energético

A los fines de realizar el estudio dinámico de un entramado general, en la Figura 5 a) se muestra un pórtico plano cerrado, referido a un sistema de coordenadas de referencia global X-Y. Se utiliza en el estudio la siguiente nomenclatura:

<i>nb</i>	Cantidad total de barras
<i>nn</i>	Número total de nodos
<i>j</i>	Subíndice que denota la barra, $j = 1, 2, \dots, nb$
<i>n</i>	Subíndice que denota el nodo, $n = 1, 2, \dots, nn$

La numeración de las barras y los nodos puede realizarse arbitrariamente, ya que se ha diseñado un algoritmo que las reenumera convenientemente, para luego realizar un recorrido del pórtico a los fines de la resolución del mismo.

Las características de cada barra son las siguientes:

E_j	Módulo de Young de la barra j
ρ_j	Densidad uniforme de la barra j
F_j	Área de la barra j
J_j	Momento de Inercia de la barra j
α_j	Ángulo entre la barra j y el eje de abscisas
$\alpha_{j,k}$	Ángulo relativo entre la barra j y la barra k
a_j	Longitud de la barra j
$X-Y$	Sistema de coordenadas globales
x_j	Coordenada local de la barra j

Para el estudio energético se considera, en cada barra j un sistema de coordenadas local x_j en donde cada punto, al vibrar, tendrá un desplazamiento transversal $v_j(x_j)$ y un desplazamiento axial $u_j(x_j)$, como se muestra en la Figura 5 b).

En el sistema local de coordenadas, considerando la variable x_j que recorre la barra j ($0 \leq x_j \leq a_j$), se considera $u_j(x_j) \geq 0$ si es en la misma dirección que x_j , $v_j(x_j) \geq 0$ si es hacia la derecha en un recorrido en la dirección x_j .

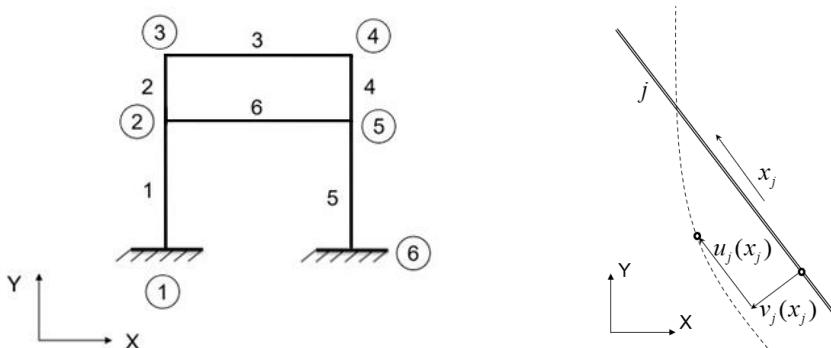


Figura 5 - Esquema de un entramado con 6 nodos y 6 barras(a), desplazamientos y coordenadas locales de cada barra j (b).

Las energías de deformación U y las cinéticas K serán la suma de la energía de cada una de las barras j :

$$U = \sum_{j=1}^{nb} U_j \quad , \quad K = \sum_{j=1}^{nb} K_j \quad (8)$$

Aplicando el principio de Hamilton:

$$\delta(\sum_{j=1}^{nb} U_j - \sum_{j=1}^{nb} K_j) = 0 \quad (9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1 a 5) en la ecuación (9) y realizando las variaciones de cada término, agrupando cada elemento y se sacando factor común, la expresión se transforma en tres ecuaciones diferenciales, una para cada elemento.

2.3 Desarrollo en series de potencia

Se expresan las funciones de desplazamiento axial $u_j(\xi_j)$ y transversal $v_j(\xi_j)$, de cada barra j en series de potencia con m términos:

$$v_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m A_{j,i} \xi_j^i \quad ; \quad u_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m B_{j,i} \xi_j^i \quad (10)$$

Las derivadas, por ejemplo, para $v_j(\xi_j)$ son:

$$v'_j(\xi_j) = \sum_{i=1}^m i A_{j,i} \xi_j^{i-1} = \sum_{i=0}^{m-1} (i+1) A_{j,i+1} \xi_j^i = \sum_{i=0}^{m-1} \psi_{1,i} A_{j,i+1} \xi_j^i \quad (11)$$

$$v''_j(\xi_j) = \sum_{i=2}^m i(i-1) A_{j,i} \xi_j^{i-2} = \sum_{i=0}^{m-2} (i+2)(i+1) A_{j,i+2} \xi_j^i = \sum_{i=0}^{m-2} \psi_{2,i} A_{j,i+2} \xi_j^i \quad (12)$$

$$v'''_j(\xi_j) = \sum_{i=4}^m i(i-1)(i-2)(i-3) A_{j,i} \xi_j^{i-4} = \sum_{i=0}^{m-4} (i+4)(i+3)(i+2)(i+1) A_{j,i+4} \xi_j^i = \sum_{i=0}^{m-4} \psi_{4,i} A_{j,i+4} \xi_j^i \quad (13)$$

Observar que se realiza un pequeño cambio en los índices de las sumatorias a los fines de que todas ellas comiencen en cero, y se define:

$$\psi_{k,i} = (i+1)(i+2)(i+3) \dots (i+k) = \frac{(i+k)!}{k!} \quad (14)$$

Al reemplazar en las ecuaciones diferenciales $v_j(\xi_j)$ y $u_j(\xi_j)$ con sus correspondientes derivadas expresadas en forma de series de potencias, se obtienen las siguientes recurrencias:

$$A_{j,i+4} = \frac{-\Omega_j^2(-1+\Omega_j^2\beta_j^2\alpha_j^2)A_{j,i}-\Omega_j^2(\beta_j^2+\alpha_j^2)\psi_{2,i}A_{j,i+2}}{\psi_{4,i}} \quad (15)$$

$$B_{j,i+2} = -\frac{\Omega_j^2\alpha_j^2 B_{j,i}}{\psi_{2,i}} \quad (16)$$

Estas ecuaciones son el núcleo central del algoritmo, lo que permite aumentar la precisión de los resultados con solo aumentar la cantidad de elementos de la serie de potencia.

3. Resultados

La Tabla 1 muestra las frecuencias de los primeros modos de vibración del pórtico doblemente empotrado de la figura 5a utilizando los siguientes parámetros para cada barra $\chi = 0,1$; $E = 2,1 \times 10^{11}$; $\rho = 7850$; $F = 0,12$; $J = 0,0036$; $G = 7,72 \times 10^{10}$

Tabla 1. Frecuencias de los primeros 5 modos de vibración

Modo	Frecuencias [rad/seg]			
	m=10	m=15	m=20	m=25
1	88,554	88,565	88,564	88,564
2	565,594	605,226	605,411	605,411
3	615,100	878,016	882,099	881,892
4	703,802	996,470	1000,700	997,55
5	784,832	1180,400	1177,700	1182,2

4. Conclusiones

La combinación de las series de potencias, el principio de Hamilton y las herramientas computacionales constituye una de las triadas más versátiles y poderosas para abordar problemas complejos en el ámbito físico e ingenieril. Como se observa en la Tabla 1, algunas frecuencias van cambiando al aumentar el número de elementos en la serie de potencias, pero la mayoría tiende a estabilizarse en un valor definido. Esto confirma que, al incrementar el número de términos, se mejora la precisión en la estimación de las frecuencias de resonancia, con la ventaja de que este aumento no supone un cambio en el algoritmo ni la cantidad de incógnitas, solo aumenta el tiempo de ejecución; no obstante, es necesario considerar si la precisión de los cálculos justifica el incremento en el tiempo de cálculo. En comparación con la teoría clásica de Bernoulli–Euler, el método propuesto ofrece una representación más precisa de la dinámica del sistema, especialmente en regímenes donde los supuestos simplificadores de la teoría clásica resultan limitantes. En conjunto, estos enfoques proporcionan un marco robusto para el análisis, la simulación y la optimización de sistemas reales, consolidándose como pilares fundamentales en la investigación científica y el desarrollo tecnológico contemporáneo.

Referencias Bibliográficas

- R. W. CLOUGH 1955 Bull. seism. Sot. Am. 45, 289. Ch the importance of higher modes of vibration in the earthquake response of a tall building
- De Rosa M. A., Lippiello M., Armenio G., Biase G. De & Savalli S., (2020) Dynamic analogy between Timoshenko and Euler-Bernoulli beams. *Acta Mechanica*, 231, 4819-4834.
- Li X. F., (2008) A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams. *Journal of Sound and Vibration*, 318(4-5), 1210-1229.
- Ghorbanpour Arani A. & Niknejad Sh., (2020) Dynamic Stability Analysis of Euler-Bernoulli and Timoshenko Beams Composed of Bi-Directional Functionally Graded Materials, *AUT J. Mech. Eng.*, 4(2), 201-214.
- Khaji, N., Shafiei, M. & Jalalpour, M. (2009) Closed-form solutions for crack detection problem of Timoshenko beams with various boundary conditions. *Int. J. Mech. Sci.* 51, 667-681.
- Negi, Y. K., Balakrishnan, N., & Rao, S. M. (2021). Fast power series solution of large 3-D electrodynamic integral equations for PEC scatterers. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 69(12), 8585–8595.
- Martín, H. D., Maggi, C., Piovan, M. T., De Rosa, M. A., & Gutbrod, N. M. (2022). “*Exact analytical calculation of natural frequencies and buckling loads of plane frames using power series*”. *Engineering Structures*, 262, 114349.
- Martín, H. D., De Rosa, M. A., Pereson, M., & Fantini, S. (2024, octubre 22-24) “*Método intuitivo para el cálculo de entramados planos con reducción en la cantidad de incógnitas*”. XVI Congreso iberoamericano de ingeniería mecánica - CIBIM 24. Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad de Concepción, Chile.
- Wolfram, S. (2010). *The Mathematica 8*. Cambridge University Press, Cambridge.