MATEMÁTICA

SEMINARIO DE INGRESO UNIVERSITARIO

EDITORIAL
SEMINARIO
R

Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Reconquista

SEMINARIO DE INGRESO UNIVERSITARIO

MATEMÁTICA

FACULTAD REGIONAL RECONQUISTA

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

El presente cuadernillo fue elaborado en el primer semestre del año 2019, dentro de las actividades previstas en el marco del Programa NEXOS, tomando como base el cuadernillo “Seminario Universitario Matemática” confeccionado por docentes y alumnos de la Facultad Regional Reconquista. Además, se ha trabajado con material de estudio recopilado de otras Facultades Regionales, Universidades y bibliografía afín; adecuando y precisando los contenidos requeridos por la normativa vigente en UTN.

Revisión de contenido y coordinación
Prof. María Graciela Ribas

Recopilación de contenido
Lic. Prof. Sebastián Hugo Fantini

Compaginación y edición
Mg. Prof. Soledad Ardiles
Tec. Luz Marina Ocampo

Dirección general del Programa NEXOS FRRq
Ing. Franco Cabás

ÍNDICE

A MODO DE BIENVENIDA

Estimados estudiantes ingresantes:

Bienvenidos a la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Reconquista. Como institución, los acompañaremos en el recorrido que están iniciando para que aquí puedan desarrollar, entre ustedes y junto con los docentes, saberes y herramientas, modos de comprender, de conocer y de buscar, que les permitan no sólo volverse profesionales competentes, sino también ciudadanos comprometidos y responsables con la sociedad de la cual formamos parte.

El "*ser estudiante universitario*" no viene dado de antemano, sino que se construye en un espacio de intercambios colectivos y procesos singulares, experiencias diversas y apuestas continuas. Espacio regulado por reglas propias y un lenguaje particular del cual poco a poco comenzarán a apropiarse. Anhelamos que este escenario en el que se entretejen vínculos, expectativas mutuas, necesidades y responsabilidades, opere como una red de sostén que permita que cada uno de ustedes pueda a futuro alcanzar las metas y los sueños que hoy los traen aquí.

En tal sentido, nos importa compartir que a lo largo de los años, la institución viene desarrollando un proceso de crecimiento tanto en su propuesta académica como en materia edilicia y vinculación con la comunidad, basándonos en la convicción de que la educación superior es un derecho que debemos garantizar asumiendo un compromiso ético, político y pedagógico cotidiano.

Haciendo un poco de historia, cabe mencionar que esta Unidad Académica fue creada el 21 de febrero del año 1986, inaugurada el 24 de abril de 1987 y reconocida como Facultad Regional en 2009. Desde el año 2008 contamos con edificio propio que es orgullo de todos los que la recorremos diariamente. Actualmente de dictan carreras de grado, pregrado y ciclos de formación.

Como misión, nos proponemos formar, de modo continuo e integral, profesionales con un alto nivel de competencia que les permitan destacarse por sus niveles de conocimiento, su formación ética y su compromiso con la mejora de la calidad de vida y el desarrollo sustentable de nuestra región. De igual modo, buscamos promover y realizar investigaciones científicas y tecnológicas que incidan tanto en la formación del estudiante, como en actividades de transferencia al medio. Por último, también trabajamos para generar, preservar y transmitir los productos de los campos científico, tecnológico y cultural para la formación plena del hombre y contribuir a su desarrollo y transformación.

De este modo, los invitamos a participar activamente de la vida institucional, confiando en que el diálogo y sus aportes contribuirán para fortalecernos y seguir creciendo.

Nuevamente, ¡Bienvenidos!

1. NÚMEROS

1.1. Números Naturales

Desde la antigüedad el hombre tuvo la necesidad de contar, tanto para realizar un trueque, que era su forma de comercio, como para conocer sus posesiones, contar su ganado, etc. De esta manera surge el conjunto de los **números naturales**. Recordemos algunas propiedades de este conjunto.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Algunas propiedades de los números naturales

a. $\mathbb{N}$ es un conjunto ordenado.
b. Tiene primer elemento (el número 1).
c. $\mathbb{N}$ no tiene último elemento.
d. $\mathbb{N}$ cumple con la Ley de cierre para la suma y la multiplicación.

Ejemplo:
Sean a, b dos números naturales. Entonces:
$a + b \in \mathbb{N}$ La suma de dos números naturales es otro número natural.
$a \cdot b \in \mathbb{N}$ La multiplicación de dos números naturales es otro número natural.

$\mathbb{N}$ *no cumple con la Ley de cierre para la resta y la división.*

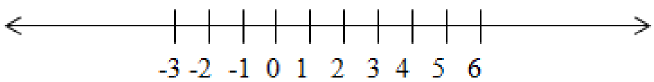
Ejemplo:
$3 - 1 = 2,\ 2 \in \mathbb{N}$, sin embargo, $1 - 1 = 0,\ 0 \notin \mathbb{N} \Longrightarrow \mathrm{a} - \mathrm{b} \notin \mathbb{N}$
$\frac{10}{5} = 2, 2 \in \mathbb{N}$, sin embargo, $\frac{9}{4} = 2{,}25 \notin \mathbb{N} \Longrightarrow \mathrm{a} : \mathrm{b} \notin \mathbb{N}$

1.2. Números Enteros

Recordemos que la resta, en el conjunto de los números naturales, siempre es posible cuando el minuendo es mayor que el sustraendo. En caso contrario no se verifica la Ley de cierre, el resultado es un número no natural. Para resolver este problema necesitamos ampliar el campo numérico introduciendo el cero y los opuestos de los números naturales. A este nuevo conjunto lo llamamos números enteros y los definimos así:
$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$, donde $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$
De otro modo;
$\mathbb{Z} = \{-n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n\}\ \forall n \in \mathbb{N}$

¿Cómo representamos gráficamente a los números enteros?

Para representar estos números, primero trazamos una recta horizontal y un punto cualquiera de ella, al que le asignamos el 0 (cero) y al cual lo llamamos origen. A la derecha del origen ubicamos los números positivos y a la izquierda los negativos.



Algunas propiedades básicas de los números enteros

a. $\mathbb{Z}$ es un conjunto ordenado.

b. $\mathbb{Z}$ no tiene primer ni último elemento.

c. Siendo a, b y $c \in \mathbb{Z}$, se verifica:

Ley de cierre para la suma: $a + b \in \mathbb{Z}$

Ley de cierre para la resta: $a - b \in \mathbb{Z}$

Ley de cierre para la multiplicación: $a \cdot b \in \mathbb{Z}$

Propiedad asociativa para la suma: $a + (b + c) = (a + b) + c$

Propiedad conmutativa para la suma: $a + b = b + a$

Existencia de inverso aditivo: $a + (-a) = 0$

Propiedad distributiva del producto respecto a la suma: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Existencia de elemento neutro para la suma: $a + 0 = 0 + a = a$

Propiedad asociativa para el producto: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Propiedad conmutativa para el producto: $a \cdot b = b \cdot a$

Existencia de elemento neutro para el producto: $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

d. Ley de tricotomía: Sean a, b y $c \in \mathbb{Z}$. Se verifica una y solo una de las relaciones siguientes: $a < b$

$a < b \;\Rightarrow a + c < b + c$
$a = b \;\Rightarrow a + c = b + c$
$a > b \;\Rightarrow a + c > b + c$

e. Además, sean a, b y $c \in \mathbb{Z}$. y$c \neq 0$. Se verifica que:

$a < b \wedge c > 0 \;\Rightarrow\; a \cdot c < b \cdot c$

$a < b \wedge c < 0 \;\Rightarrow\; a \cdot c > b \cdot c$

Recordemos la regla de signos para la multiplicación y la división. Se ejemplifica para la multiplicación solamente pero es válido también para la división.
$+ \cdot += +$
$+ \cdot -= - \cdot += -$
$- \cdot -= +$

Ejemplo:

Veamos un ejemplo para la propiedad 5b de los números enteros. Primero asignamos cualquier valor entero a, b, c.
$a = 8$; $b = 15$ y $c = -6$
Luego
$8 < 15 \;\Rightarrow\; 8 \cdot (-6) > 15 \cdot (-6)$
Se verifica
$(-48) > (-90)$

Operaciones en $\mathbb{Z}$

En esta sección recordaremos como se resuelven las operaciones básicas en el conjunto de los números enteros. Para comenzar resolvamos el siguiente problema.

Problema

Un ingeniero electromecánico debe evaluar la compra de insumos eléctricos que realizará su empresa a un proveedor de la provincia de Buenos Aires. Debe comprar 20 fusibles NH con un precio de \$12 por unidad y 42 interruptores termomagnéticos de 32A por un precio de \$60 por unidad. ¿Cuál es el costo total de los insumos?

Para resolver el problema debemos sumar el precio total de los fusibles con el precio total de los interruptores.

El costo total es igual al costo de los 20 fusibles más el costo de los 42 interruptores.

Simbólicamente traducimos esta situación del siguiente modo

Costo total= $20 \cdot \$12 + 42 \cdot \$60$
Costo total= \$2.760

Respuesta: La empresa tiene que invertir \$2.760 entre fusibles e interruptores.

El problema es sencillo, pero detengámonos en la operación. ¿Qué se realizó primero, las multiplicaciones o la suma?
En las operaciones matemáticas se va resolviendo por términos. Los términos son operaciones que están separados por los operadores (+) y (-) como se muestra a continuación.

$$\overbrace{520 \cdot \$12}^{1^{\circ}\text{ Término}} + \overbrace{42 \cdot \$60}^{2^{\circ}\text{ Término}}$$
$$\$240 + \$2.520 = \$2.760$$

Ejercicio 1: Separa en términos y resuelve las siguientes operaciones:

a. $23 \cdot 5 \cdot 8 - \frac{20}{5} \cdot 4 + 5 - 8 + 7 \cdot 10 =$

b. $25 \cdot 2 - 100 + 2^2 \cdot 3 - 15 \cdot 1 + \frac{100}{5} =$

c. $8 \cdot \frac{9}{3} - 1024 + 15 \cdot 10 \cdot \frac{150}{15} =$

Uso de paréntesis, corchetes y llaves

Para separar las operaciones de acuerdo a la jerarquía y a las propiedades de las mismas se utilizan los paréntesis, corchetes y llaves. Al utilizarlos se debe resolver de adentro hacia afuera, es decir, se debe resolver primero las operaciones que están dentro del paréntesis, siguiendo la jerarquía de los términos, para luego operar con el resultado.

Veamos la importancia de la utilización de los paréntesis y corchetes en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 2: Demostrar que los resultados son distintos al no usar los paréntesis y los corchetes.

a. $[8 + (15 \cdot 21) - 12] \cdot 2 \neq 8 + 15 \cdot 21 - 12 \cdot 2$

b. $10 + (12 + 2) \cdot 3 - (1 + 6) \neq 10 + 12 + 2 \cdot 3 - 1 + 6$

c. $-\left[\frac{(30-5)}{5}\right] + 15 \neq -30 - \frac{15}{5} + 15$

Veamos la resolución del inciso a):

$$\begin{aligned}
[8 + (15 \cdot 21) - 12] \cdot 2 &\neq 8 + 15 \cdot 21 - 12 \cdot 2 \\
[8 + 315 - 12] \cdot 2 &\neq 8 + 315 - 24 \\
311 \cdot 2 &\neq 299 \\
622 &\neq 299
\end{aligned}$$

Ejercicio 3: Resolver las siguientes operaciones combinadas

a. $\{2 \cdot [36 - 7 \cdot (5 + 64) - 15] + 32\} \cdot 10 =$

b. $12 \cdot \left\{2^2 - \left[\frac{(10+100)}{5}\right]\right\} =$

c. $\frac{[(1+5)^2 - 30]}{2} =$

d. $\{30 - [20 \cdot 2 - 5 \cdot (10 + 15)]\} \cdot (-2) =$

e. $-\{2 + (-1) \cdot [3^2 \cdot (10 - 1)]\} =$

División Entera

División entera y división exacta. Una división es entera cuando el cociente y el resto de la misma son números enteros. En toda división entera el resto es mayor o igual que cero y menor que el divisor. Una división entera es exacta cuando el resto de la división es cero

En esta sección vamos a recordar algunos conceptos básicos y propiedades de la división entera.

Dados dos números enteros a y $b \neq 0$, existen dos únicos números enteros q y r tal que $a = b \cdot q + r$

El algoritmo que permite encontrar q y r, conociendo a y b, se denomina división entera, denominando:

a Dividendo

b Divisor

q Cociente

r Resto

Si $r = 0$, se puede decir que a es ***divisible*** por b o que a es ***múltiplo*** de b.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} 13 & 4 \\ \cline{2-2} 1 & 3 \end{array} \qquad \Rightarrow 13 = 3 \cdot 4 + 1 \text{ con } 0 < 1 < 4$$

Por lo tanto 13 no es divisible por 4, ya que el resto es distinto de cero.

$$\begin{array}{r|l} 50 & 5 \\ \cline{2-2} 00 & 10 \end{array} \qquad \Rightarrow 50 = 10 \cdot 5 + 0 \text{ con } 0 = 0 <$$

Por lo tanto 50 es divisible por 5, ya que el resto es cero

Ejercicio 4: Determinar cuáles de los siguientes números enteros son divisibles por 13.

a. 247

b. -91

c. 123

d. -143
e. 28.561
f. 2.197

Números primos

Los números primos son aquellos que solo resultan divisibles por sí mismos y por la unidad.

Los que pueden dividirse por otros números, se denominan compuestos (por ejemplo el 9 que además de dividirse por 9 y por 1, también puede dividirse exactamente por 3).

El número 1 no es primo, de acuerdo con la definición precedente. Son primos el 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19,....Existen infinitos números primos. El número 2 es el único número primo par.

Varias propiedades aritméticas fundamentales se expresan a partir de estos conceptos:

a. Todo número natural posee un divisor primo.
b. Todo número natural o es primo, o bien, puede representarse como producto de números primos.
c. La representación de un número natural como producto de números primos es única.

Ejemplo:
Veamos un ejemplo. Representemos al número 264 como producto de números primos. Para resolver este ejemplo existe un método sencillo (el que se muestra en el recuadro) que consta en colocar al número 264 a la izquierda y a la derecha anotamos el menor número primo por el cual es divisible el número 264. El resultado de la división lo anotamos debajo del 264 y volvemos a dividir por el menor número primo y así sucesivamente hasta llegar a la izquierda al número 1. Luego, se puede expresar al 264 como producto de sus divisores como se muestra a continuación.

264	2
132	2
66	2
33	3
11	11
1	

$264 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3 \cdot 11$
El procedimiento realizado anteriormente se llama factorización

Ejercicio 5:

a. Escribir todos los números primos menores que 200.
b. Factorizar los siguientes números: 1.287; 3.150; 5780 y 6.050

Veamos otro ejemplo: Al factorizar los números enteros positivos $a = 72$ y $b = 84$ se obtiene:

72	2	84	2
36	2	42	2
18	2	21	3
9	3	7	7
3	3	1	
1			

$72 = 2^3 \cdot 3^2$ $\quad$ $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

Vemos que los números primos que aparecen en ambas factorizaciones son el 2 y el 3.
Decimos que el mayor de los divisores comunes entre 72 y 84 es el producto de los factores primos comunes con su menor exponente. Este número representa el máximo común divisor entre 72 y 84 y lo simbolizamos:
MCD (72; 84) $= 2^2 \cdot 3 = 12$

Decimos que 12 es el mayor de los divisores comunes entre 72 y 84.
Generalizando:
MCD: Dados dos o más números enteros, su máximo común divisor (MCD) es el mayor número entero que divide a todos los números enteros dados.

Ejemplo: Tomando los números del ejemplo anterior, ahora consideramos los números primos que se repiten en ambas factorizaciones con mayor exponente y también los que no se repiten. El producto de estos números representa el mínimo común múltiplo entre 72 y 84 y lo simbolizamos:

mcm (72, 84) = $2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 504$

Decimos que 504 es el menor de los múltiplos comunes entre 72 y 84.

Generalizando:
mcm: Dados dos o más números enteros el mínimo común múltiplo (mcm), es el menor entero que es divisor de todos los números dados.

Ejercicio 6: Calcular el máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (mcm) de las siguientes expresiones:

a. MCD (120, 140, 75)

b. mcm (100, 126)

c. mcm (206, 96, 124, 56)

d. MCD (1000, 492)

e. mcm (749, 28)

f. MCD (550, 982, 1020)

g. MCD (1230, 540, 567)

h. mcm (840, 35100)

1.3. Números Racionales

En el conjunto de los números enteros nos encontramos con la dificultad de que la división sólo es posible cuando el dividendo es múltiplo del divisor. Por ejemplo:
$7: 2 =?$
Esta operación no tiene solución en$\mathbb{Z}$, porque 7 no es múltiplo de2.
Para salvar esta dificultad aparece un nuevo campo numérico: el conjunto de los números racionales y lo simbolizamos con la letra$\mathbb{Q}$.

Definición:
Dados dos números enteros a y b; con $b \neq 0$, llamamos número racional a la fracción $\frac{a}{b}$, siendo a el numerador y b el denominador.
Algunas propiedades de los números racionales:
a. Es un conjunto denso, es decir que entre dos números racionales siempre existe otro número racional.

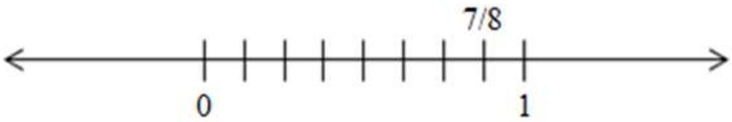
b. Cumple la ley de cierre para la suma, la resta, la multiplicación y la división (con excepción de la división por cero).

Interpretación de números racionales

El número racional $\frac{a}{b}$ indica que dividimos el todo en b partes iguales y tomamos a de esas partes. Así, dado el número $\frac{7}{8}$, éste nos indica que el todo se ha dividido en 8 partes iguales y de ellas se han tomado 7.

Podemos representar gráficamente la situación anterior mediante una barra que se ha divido en 8 partes iguales. La parte sombreada representa al número $\frac{7}{8}$

En la recta numérica, como siete octavos es menor que uno, dividimos la unidad en ocho partes iguales, contamos siete de ellas a partir del cero, obteniendo así el punto de la recta que representa al número 7/8



Ejercicio 7: Dibujar en la recta numérica los siguientes números racionales y expresar entre que números enteros se encuentra.

a. 2/9

b. 9/5

c. -1/5

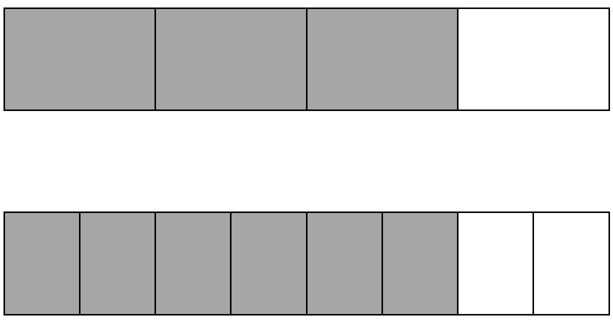
d. 4/2

e. 15/16

f. -7/8

Fracciones Equivalentes

Decimos que dos fracciones son equivalentes cuando representan la misma cantidad. Por ejemplo $\frac{3}{4}$ y $\frac{6}{8}$ representan la misma cantidad de un todo.



Si multiplicamos (o dividimos) el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número distinto de cero, obtenemos una fracción equivalente a la dada.

Ejemplo: $\frac{3}{4} = \frac{3.2}{4.2} = \frac{6}{8}$ por lo tanto, ¾ es equivalente a 6/8.

Este procedimiento nos sirve para simplificar fracciones. Al simplificar fracciones podemos determinar la fracción equivalente irreducible.

Fracción irreducible
Se dice que una fracción es irreducible cuando el numerador y el denominador no tienen factores primos comunes.
Para simplificar una fracción a su forma irreducible debemos primero factorizar tanto el numerador como el denominador y luego simplificar los factores primos comunes.

Ejercicio 8: Representar en forma reducida los siguientes números racionales:

a. $-\frac{900}{390}$

b. $-\frac{75}{27}$

c. $-\frac{560}{490}$

d. $\frac{269}{847}$

Damos por solución al primer inciso

$$\frac{-900}{390} = -\frac{900}{390} = -\left(\frac{2^2.3^2.5^2}{2.3.5.13}\right) = -\left(\frac{\cancel{2}.2.\cancel{3}.3.\cancel{5}.5}{\cancel{2.3.5}.13}\right) = -\frac{30}{13}$$

Ejercicio 9: Simplificar los siguientes números racionales hasta llegar a su fracción irreducible:

a. $\frac{-75}{27} =$

b. $\frac{100}{75} =$

c. $\frac{256}{768} =$

d. $\frac{10800}{4000} =$

e. $\frac{17600}{2640} =$

f. $\frac{24696}{27783} =$

Expresión decimal

Todo numero racional por definición es aquel que se puede expresar como fracción, pero a su vez estas fracciones pueden expresarse en forma decimal al realizar la división entre el numerador y el denominador.
Podemos definir: “Todo numero racional puede expresarse como numero decimal exacto o periódico”.

Ejemplo:

$\frac{1}{5} = 0{,}2$ → decimal exacto

$\frac{1}{3} = 0{,}333 \ldots = 0,\widehat{3}$ → Periódica pura. El período es 3

$\frac{1}{6} = 0{,}1666 \ldots = 0{,}1\widehat{6}$ → Periódica mixta. Su período es 6. Su anteperíodo es 0,1

$\frac{86}{11} = 7{,}8181 \ldots = 7,\widehat{81}$ → Periódica pura. Su período es 81

¿Y si queremos pasar un número decimal a su forma fraccionaria?
A continuación indicamos como se pasa de la forma decimal a la forma fraccionaria.

Exactas
Para pasar de un número decimal exacto a fracción se divide y se multiplica por 10^n, donde n es el número de decimales.

Ejemplo:

a. $0{,}5 = \frac{0{,}5 \cdot 10^1}{10^1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

b. $0{,}256 = \frac{0{,}256 \cdot 10^3}{10^3} = \frac{256}{1000} \frac{32}{125}$

Puras
Un número decimal periódico puro es igual a la suma de su parte entera más su período dividido 9 si su período es único, 99 si su período tiene 2 números, etc.

Ejemplo:

a. $0,\hat{3} = 0 + \frac{3}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

b. $2,\widehat{125} = 2 + \frac{125}{999} = \frac{2123}{999}$

Mixtas
Un número decimal mixto es igual a la suma de la parte entera más el número decimal entero, menos su ante período y dividido tantos nueves como cifras decimales periódicas tenga, al igual que en las puras, pero agregando en el divisor. Luego de los nueves, se agregan tantos ceros como números anti periódicos tenga el decimal.

Ejemplo:

a. $3,\widehat{125} = 3 + \frac{125-1}{990} = \frac{1547}{495}$

b. $1{,}98\hat{5} = 1 + \frac{985-98}{900} = \frac{1787}{900}$

Ejercicio 10: Pasar los siguientes números decimales a su expresión fraccionaria.

a. $0{,}13$

b. $1,\hat{6} =$

c. $2{,}1\hat{3} =$

d. $6{,}15 =$

e. $2{,}35\hat{2} =$

f. $0{,}1 =$

g. $0{,}875 =$

Orden en $\mathbb{Q}$
El conjunto $\mathbb{Q}$ de números racionales también es un conjunto ordenado al igual que $\mathbb{Z}$.

Ejemplos:

a. $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ escribiendo ambas fracciones en forma decimal vemos que $0{,}5 < 0,\hat{6}$

b. $2 > \frac{8}{5}$ en forma decimal vemos que $2 > 1{,}6$

c. $\frac{2}{9} = \frac{4}{18}$ porque $0,\hat{2} = 0,\hat{2}$

Ejercicio 11: Ordenar de menor a mayor los siguientes números.

$\frac{6}{14}$; $2{,}3$; 4; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}05$; $\frac{17}{11}$; $1,\hat{5}$; $4{,}1\widehat{32}$

Operaciones en $\mathbb{Q}$

Suma

Recordemos que la suma de varias fracciones con el mismo denominador es la fracción con el mismo denominador que aquellas y el numerador es la suma de los numeradores.

Ejemplo:

$$\frac{2}{9}+\frac{1}{9}+\frac{5}{9}=\frac{2+1+5}{9}=\frac{8}{9}$$

Si las fracciones tienen distinto denominador, se buscan fracciones equivalentes a las dadas que tengan igual denominador y después se suman de la forma indicada anteriormente.

Ejemplo:

$$2+\frac{2}{5}-\frac{7}{15}=\frac{150}{75}+\frac{30}{75}-\frac{35}{75}=\frac{150+30-35}{75}=\frac{145}{75}=\frac{29}{15}$$

En general:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a.d+c.b}{b.d}$$

Es conveniente usar como denominador para las fracciones equivalentes, el mínimo común múltiplo. Observando el ejemplo anterior, vemos, que el denominador común para las fracciones equivalentes es 15, que es el mínimo común múltiplo entre 1, 5 y 15.

Ejemplo:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{10}+\frac{5}{8}$$

Descomponiendo los denominadores en factores primos, obtenemos:

mcm $(6,10,8)=120$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{10}+\frac{5}{8}=\frac{20}{120}+\frac{36}{120}+\frac{75}{120}=\frac{131}{120}$$

Multiplicación

Recordemos que el producto de varias fracciones es otra fracción que tiene como numerador el producto de los numeradores y como denominador el producto de los denominadores.

Ejemplo:

$$\frac{6}{11}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{7}{2}=\frac{6\cdot(-3)\cdot 7}{11\cdot 4\cdot 2}=-\frac{126}{88}$$

En general:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

División

Para dividir fracciones es conveniente recordar:

Definición: Dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son recíprocas o inversas si su producto es igual a 1, es decir: $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=1$

De la definición anterior obtenemos las siguientes conclusiones:
Una fracción $\frac{a}{b}$ tiene inversa si y solo si $a \neq 0$
La fracción inversa de $\frac{a}{b}$ es la fracción $\frac{b}{a}$
Para dividir una fracción por otra, se multiplica la primera por la inversa de la segunda.

Ejemplo:

$$\frac{5}{6}:\frac{7}{11}=\frac{5}{6}\cdot\frac{11}{7}=\frac{55}{42}$$

En general:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Veamos algunas propiedades que cumplen estas operaciones

Operación	Propiedad
Suma	Cerrada Asociativa Conmutativa Tiene elemento neutro Todo número tiene su opuesto
Multiplicación	Cerrada Asociativa Conmutativa Tiene elemento neutro Todo número distinto de cero admite inverso Distributiva respecto a la suma

Ejercicio 12: Realizar las siguientes operaciones en $\mathbb{Q}$

a. $\frac{9}{5}+\frac{41}{2}=$

b. $\frac{5}{8}+\frac{1}{2}=$

c. $\frac{9}{5}\cdot\frac{41}{2}=$

d. $\frac{4}{5}+\frac{13}{2}=$

e. $\frac{56}{3}+1\cdot\frac{1}{2}=$

f. $\frac{8}{7}\cdot\frac{2^2}{11}=$

g. $\frac{101}{3}+\left(\frac{14}{7}-\frac{19}{21}\right)=$

h. $\frac{213}{13}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)=$

i. $\frac{101}{10}-\frac{57}{4}=$

Ejercicio 13: resolver aplicando propiedades

a. $\frac{5}{3}:\frac{8}{9}=$

b. $8 : \frac{5}{8} =$

c. $\frac{1}{2} : \left(\frac{1}{16}\right)^{-1} =$

d. $\frac{14}{61} : \frac{61}{14} =$

e. $\frac{1}{100} : \frac{251}{36} =$

f. $\frac{2}{19} : 1 =$

g. $1^{-1} : \frac{3}{14}$

h. $\frac{201}{315} : \frac{2}{3} =$

Números Irracionales $\mathbb{I}$

Recordemos que los números racionales pueden expresarse como una razón entre dos números enteros. Además todo número racional puede expresarse como un número decimal exacto o periódico.

Hay números que no pueden clasificarse como racionales y son aquellos que poseen infinitas cifras decimales no periódicas, a los que llamaremos números irracionales.

Desde la antigüedad se conocen algunos de estos números. Por ejemplo tenemos al número π que es la relación entre el radio de una circunferencia y su perímetro. Los pitagóricos se dieron cuenta que al formar un triángulo rectángulo de catetos iguales a la unidad, su hipotenusa era un número no natural $\sqrt{2}$

Veamos algunas cifras de estos números que hemos nombrado:

$\pi \cong 3{,}14159265358979323846264338327$9 ...

$\sqrt{2} \cong 1{,}4142135623730950488016887242096$ ...

$e \cong 2{,}71828182845904523536$ ...

No es posible representar en la recta numérica todos los números irracionales por métodos geométricos, aunque si algunos de ellos. Veremos a continuación que podremos representar las raíces cuadradas de los números utilizando una regla, un compás y el teorema de Pitágoras.

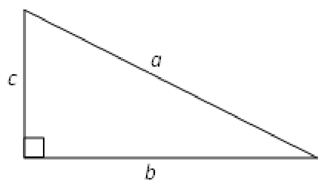
Primero recordemos que nos dice el teorema:

En todo triangulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2}$

$a =$ Hipotenusa

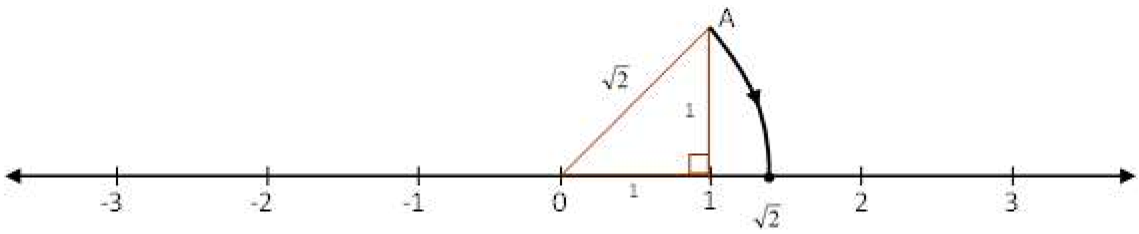
$b; c =$ Catetos



Ahora veamos como representar por ejemplo $\sqrt{2}$ que es un numero irracional. Formando un triangulo rectangulo cuyos catetos midan $b = 1, c = 1$ la ecuacion nos queda:

$a = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

Ubicando el triangulo con vertice en el 0 de la recta numerica y con la ayuda de un compas con centro en 0 y radio en A, cortamos la recta exactamente en $\sqrt{2}$ como se muestra a continuación.



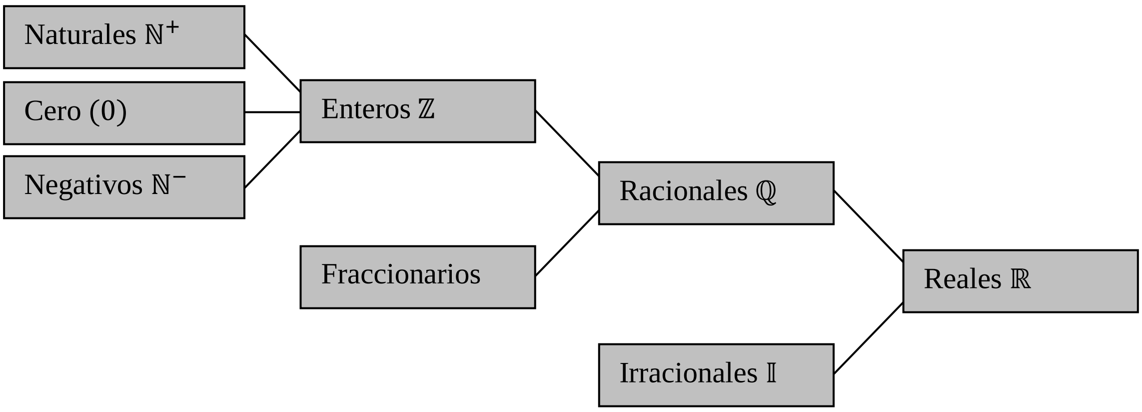
Siguiendo con el esquema, si quisieramos representar $\sqrt{3}$, hacemos $a = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ Dejamos como ejercitacion su representacion en la recta.

Ejercicio 14: Representar en la recta numérica

$\sqrt{3};\ \ \sqrt{5};\ \ \sqrt{10};\ \ 2+\sqrt{5};\ \ 2\sqrt{3}$

1.4. Números Reales

Los números racionales junto con los números irracionales, constituyen el conjunto de los números reales (R).



Existe una correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta: a cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa, por ello decimos que los números reales completan la recta.
A continuación daremos las propiedades fundamentales de las operaciones en$\mathbb{R}$.
Sean $a, b\ y\ c$ números reales:

La suma satisface las siguientes propiedades:

a. Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$
b. Conmutativa: $a + b = b + a$
c. Existencia de elemento neutro: $\exists\ 0 \in \mathbb{R}: a + 0 = 0 + a = a$
d. Existencia de elemento opuesto:$\forall a \in \mathbb{R}, \exists (-a) \in \mathbb{R}: a + (-a) = (-a) + a = 0$

El producto satisface las siguientes propiedades:

a. Asociativa: $\mathrm{a} \cdot (\mathrm{b} \cdot \mathrm{c}) = (\mathrm{a} \cdot \mathrm{b}) \cdot \mathrm{c}$
b. Conmutativa: $\mathrm{a} \cdot \mathrm{b} = \mathrm{b} \cdot \mathrm{a}$
c. Existencia del elemento neutro: $\exists\ 1 \in \mathbb{R}:\ \mathrm{a} \cdot 1 = 1 \cdot \mathrm{a} = \mathrm{a}$
d. Existencia del elemento inverso:$\forall \mathrm{a} \in \mathbb{R}, \mathrm{a} \neq 0, \exists \mathrm{a}^{-1} \in \mathbb{R}:\ \mathrm{a} \cdot \mathrm{a}^{-1} = \mathrm{a}^{-1} \cdot \mathrm{a} = 1$

e. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma:
$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

La diferencia o resta se define a partir de la definición de suma:
$a - b = a + (-b), \forall a, b \in \mathbb{R}$

El cociente se define a partir de la definición de producto:
$b \neq 0, a \div b = a \cdot b^{-1}, \forall a, b \in \mathbb{R}$

Observación: El 0 no tiene elemento inverso.

Potenciación de exponente natural

Definición: Sea n un número natural y a un número real cualquiera:
$a^0 = 1\ si\ a \neq 0$
$a^1 = a$
$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a\ \ si\ n > 1$

Propiedades

a. El producto de varias potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la suma de los exponentes de los factores: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
b. El cociente de dos potencias de igual base es otra potencia de la misma base cuyo exponente es la diferencia de los exponentes del dividendo y del divisor:
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
c. La potenciación es distributiva respecto del producto: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
d. La potenciación es distributiva respecto del cociente: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
e. La potencia de una potencia es igual a otra potencia de la misma base cuyo exponente es el producto de los exponentes: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
f. Si el exponente es negativo se tiene: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Ejercicio 15: Aplique las propiedades de la potenciación para resolver:

a. $2^3 . 2^2 . 2^4 =$
b. $\frac{2^5}{2^3} =$
c. $(2.13.14)^3 =$
d. $(-3.5)^2 =$
e. $\left(-\frac{5}{3}\right)^3 =$
f. $(3^4)^2 =$
g. $(-5)^{-3} =$
h. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} =$
i. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} =$

Aplicación de la potenciación: Notación científica

En el libro Cosmos, Carl Sagan nos dice lo siguiente:
“…Si nos soltáramos al azar dentro del Cosmos la probabilidad de que nos encontráramos sobre un planeta o cerca de él sería inferior a una parte entre mil millones de billones de billones”.
Escribamos el número que aparece en el relato.

Si tenemos en cuenta que:
1.000.000 = 1 millón
1.000.000.000.000 = 1 billón

El número en cuestión es:
1.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000
Imaginemos lo incomodo que sería operar con este número.
Por otra parte, sabemos que toda potencia con exponente entero positivo de 10 es la unidad seguida de tantos ceros como unidades tiene el exponente.

Ejemplo:

$10^1 = 10$
$10^2 = 100$
$10^3 = 1000$
$$10^n = \frac{10.10.10 \ldots\ldots..10}{n\ veces} = \frac{10000 \ldots\ldots 0}{n\ ceros}$$

Además, toda potencia con exponente entero negativo de 10, es un numero decimal formado por un uno (1) precedido por tantos ceros (0) como indica el valor absoluto del exponente.

Ejemplo:
$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$
$$10^{-2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

Volviendo al tema, podemos escribir el número visto en el relato de manera más conveniente expresándolo como potencia de diez. Entonces:
Mil millones de billones de billones $= 10^{33}$

De la misma manera 1 millón expresado como potencia de diez es 10^6 y 1 billón equivale a la potencia 10^{12}. Por ejemplo, si usamos este resultado podemos escribir el número 18.360.000.000.000 de las siguientes formas:

$$18{,}36 \times 10^{12} = 183{,}6 \times 10^{11} = 1{,}836 \times 10^{13}$$

De estas opciones, la última se conoce como notación científica o exponencial y resulta útil para operar con números muy grandes o muy pequeños.

Definición

Se dice que un número positivo x se escribe en notación científica si está expresado como sigue: $x = a \times 10^n$
Donde $1 \leq a < 10$ y n es un entero. El exponente del diez se denomina orden.

Ejemplos:

a. $367.415.000 = 3{,}67415 \times 10^8 \cong 3{,}67 \times 10^8$

b. $0{,}0000000000152 = 1{,}52 \times 10^{-10}$

Operaciones con notación científica: Suma, resta, multiplicación y división

Como hemos dicho la notación científica nos permitirá operar con números muy grandes o muy chicos de manera más fácil. Veamos cómo realizar las cuatro operaciones básicas.

Suma y resta

a. Si los sumandos son del mismo orden de magnitud (potencia) sumamos o restamos los números que preceden a las potencias de 10.

b. Si los sumandos no son del mismo orden de magnitud se reducen al mayor de los órdenes, y se suman o restan los números que preceden a las potencias de 10.

Ejemplo:

Realizar la suma $2{,}1 \times 10^3 + 3{,}41 \times 10^4$
Como los órdenes no son iguales, reducimos $2{,}1 \times 10^3$ a $0{,}21 \times 10^4$, entonces:
$0{,}21 \times 10^4 + 3{,}41 \times 10^4 = (0{,}21 + 3{,}41) \times 10^4 = 3{,}62 \times 10^4$

Producto y división:

a. Para multiplicar números en notación científica, se multiplican los números que preceden a las potencias de 10 y se suman las potencias.

b. Para dividir dos números en notación científica, se dividen los números que preceden a las potencias de 10 y se restan las potencias.

Ejemplo:
La masa de un átomo de C (carbono) es $0{,}00000000000000000000001994\ [g]$. ¿Cuál es la masa de 2.195 átomos de C?
Solución:
Masa de un átomo de C = $0{,}00000000000000000000001994\ [g] = 1{,}994 \times 10^{-23}\ [g]$

Cantidad de átomos = $2.195 = 2{,}195 \times 10^3$

Aplicando regla de tres simple nos queda:

$$\frac{2{,}195 \times 10^3 \cdot 1{,}994 \times 10^{-23} \cdot [C] \cdot [g]}{1 \cdot [C]} = (2{,}195 \cdot 1{,}994) \times 10^{3-23}\ [g] \cong 4{,}37 \times 10^{-20}[g]$$

Ejercicio 16:
Escribir en notación científica:

a. "Hay cientos de miles de millones de galaxias"

b. "La energía almacenada en el núcleo de un átomo de hidrogeno es igual a ciento veintidós mil quinientos millones de Joules"

c. "Cada galaxia tiene en promedio un centenar de miles de millones de estrellas"

Ejercicio 17:

De cada uno de los siguientes pares de números señalar cual es el mayor

a. 3×10^{33} ; 3×10^{-3}

b. 3×10^3 ; 10.000

c. $0{,}0001$; 2×10^{-4}

d. 21×10^3 ; $2{,}1 \times 10^4$

Ejercicio 18:

Efectuar las siguientes operaciones:

a. $(5 \times 10^4) \cdot (1{,}6 \times 10^2) =$

b. $(6{,}01 \times 10^{-3}) : (5{,}23 \times 10^6) =$

c. $(3{,}4 \times 10^2) + (4{,}92 \times 10^4) =$

d. $\{(6{,}10 \times 10^4) \cdot (3{,}18 \times 10^{-4})\} : \{(8{,}08 \times 10^7) \cdot (1{,}62 \times 10^{11})\} =$

Radicación

Definición

La raíz n-ésima de un número real a, denotada por $\sqrt[n]{a}$
$\sqrt[n]{a} = b$ si $a = b^n$

Cuando n es par, $a \geq 0$ y cuando n es impar, a es cualquier número real.
Cada número real positivo "a" tiene una única raíz n-ésima positiva y cada número real negativo tiene una única raíz n-ésima negativa, siempre que n sea un número impar.
Los siguientes comentarios son importantes:
Los números negativos no tienen raíz de índice par (en el conjunto de los números reales), ya que el cuadrado de cualquier número real es no negativo. Por ejemplo, $\sqrt{-4}$ no es un número real pues no existe un número real cuyo cuadrado sea -4.
La raíz n-ésima de 0, siendo n>1, es 0, ya que $0^n = 0$, es decir, $\sqrt[n]{0} = 0$

Ejemplos:

a. $\sqrt{64} = 8$

b. $\sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

c. $\left(\sqrt{1.4}\right)^2 = 1.4$

d. $\sqrt{5^2} = 5$

e. $\sqrt{(-5)^2} = 5$

Si analizamos **e.** se observa: $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$

Resumiendo: Si $n \geq 2$ es un entero positivo y a es un número real, tenemos que:

$\sqrt[n]{a^n} = a,$ si n es impar
$\sqrt[n]{a^n} = |a|,$ si n es par

Propiedades

a. La radicación es distributiva con respecto al producto: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

b. La radicación es distributiva con respecto al cociente: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

c. La raíz de otra raíz, es una raíz con el mismo radicando y cuyo índice es el producto de los índices: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Ejercicio 19:

Resolver las siguientes operaciones utilizando propiedades:

a. $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 125} =$

b. $\sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[6]{4} \cdot \sqrt[6]{8} =$

c. $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$

d. $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

e. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{2}}$

Potencia de exponente racional

Definición
Sea un número racional $\frac{m}{n}$, con $n \geq 2$, si a es un número real tal que $\sqrt[n]{a}$ está definida, entonces $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

Ejemplo:

a. $7^{\frac{3}{2}} = \sqrt{7^3}$

b. $7^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{7^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{7^3}}$

Observación: Las propiedades de las potencias de exponente racional son las mismas que las de las potencias de exponente entero.

Cálculos con radicales

Simplificación de radicales
Simplificar expresiones radicales nos permitirá poder operar con ellas de manera más fácil. Para simplificar expresiones radicales se factoriza el radicando y se aplican propiedades de la potenciación y la radicación de manera de poder simplificar índices y exponentes.

Ejemplo:

a. $\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b. $\sqrt{6000} = \sqrt{2^4 \cdot 3 \cdot 5^3} = \sqrt{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 5} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 5} = 2^2 \cdot 5 \cdot \sqrt{15} = 20\sqrt{15}$

Suma de radicales

Para sumar radicales se deben tener el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo:

a. $\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = \left(1 + 5 - \frac{1}{2}\right)\sqrt{3} = \frac{11}{2}\sqrt{3}$

En algunos casos es necesario simplificar los radicales para poder tener el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo:

a. $\sqrt{2} + \sqrt{8} - 3\sqrt{50} = \sqrt{2} + \sqrt{2^2}\sqrt{2} - 3\sqrt{5^2}\sqrt{2} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} - 15\sqrt{2} = -12\sqrt{2}$

Multiplicación de radicales
Para multiplicar radicales, si tienen igual índice se usan las propiedades vistas, si tienen distinto índice se reduce a común índice y luego se efectúa el producto.

Ejemplos:

a. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16}$

b. $\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{3^3} = \sqrt[12]{5^4 \cdot 3^3}$

Racionalización de denominadores
Cuando tenemos radicales en los denominadores es conveniente encontrar una expresión equivalente que no contenga radicales en el denominador. En esos casos se dice que se ha racionalizado el denominador. Para ello, se multiplica y se divide la correspondiente fracción por una expresión adecuada de manera de eliminar el radical del denominador. Veamos dos posibles casos:

Denominador con un solo término

En estos casos se buscará que en el denominador nos quede lo siguiente: $\sqrt[m]{a^n} \cdot \sqrt[m]{a^w}$ con $n + w = m$.

O sea que debemos buscar w de manera que $n + w$ sea m.

Ejemplos:

a. $\frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{7^2}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

b. $\frac{4}{\sqrt[3]{9}} = \frac{4}{\sqrt[3]{3^2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \frac{4\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}$

Denominador de dos términos e índice 2

En estos casos utilizaremos una propiedad denominada producto de binomios conjugados, la cual veremos con profundidad en otro capítulo. Recordemos su expresión matemática: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Ejemplos:

$$\frac{3}{1+\sqrt{2}} = \frac{3}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot (1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2}) \cdot (1-\sqrt{2})} = \frac{3 \cdot (1-\sqrt{2})}{1^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{3 \cdot (1-\sqrt{2})}{1-2} = -3 \cdot (1-\sqrt{2})$$

Ejercicio 20: Racionalizar los siguientes denominadores:

a. $\frac{2}{\sqrt[5]{3}} =$

b. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$

c. $\frac{1}{\sqrt[3]{2^5}} =$

d. $\frac{(1+\sqrt{2})}{1-\sqrt{2}} =$

Ejercicio 21: Resolver las siguientes operaciones con radicales:

a. $\sqrt{32} - 3\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{8}} =$

b. $\sqrt{6}.\sqrt{27} + \sqrt{75} - 5\sqrt{8} + \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} =$

Logaritmación

Siendo a, b y n tres números relacionados así: $a^n = b$

Cuando trabajamos con potencia, los datos son a y n y debemos calcular b.

En la radicación los datos son b y n, debemos entonces calcular la base a.

Si tenemos como datos a y b y queremos calcular el exponente n usamos logaritmos.

Definición de logaritmo

Sean a y b reales positivos, con $a \neq 1$, diremos que n es el logaritmo en base a de b si y sólo si a elevado a la n es igual a b

En símbolos:

$\log_a b = n \Leftrightarrow a^n = b$

La expresión $log_a b$ se lee: “logaritmo en base a de b”

Ejemplo:

$\log_2 8 = 3$ Porque $2^3 = 8$

$\log_6 \frac{1}{36} = -2$ Porque $6^{-2} = \frac{1}{36}$

La expresión simbólica de la definición de logaritmos dice que ambas igualdades son equivalentes, es decir, la expresión en la forma logarítmica a la izquierda es equivalente a la expresión de la derecha a la que se llama expresión exponencial.

La siguiente tabla tiene varios ejemplos de la equivalencia entre las dos formas:

Forma logarítmica	**Forma exponencial**
$\log_b x = y$	$b^y = x$
$\log_5 25 = 2$	$5^2 = 25$
$\log_{27} 9 = \frac{2}{3}$	$27^{2/3} = 9$
$\log_b 1 = 0$	$b^0 = 1$
$\log_{1/2} 8 = -3$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$

Algunas convenciones para tener en cuenta:

El logaritmo en base 10 se llama decimal. La convención es omitir el número 10 (así como en la raíz cuadrada omitimos el 2), por consiguiente escribimos $\log a$ en lugar de $\log_{10} a$ y leemos logaritmo decimal de a.

Ejemplos:

a. log 100=2
b. log 1000 =3
c. log 0,001 = -3

El logaritmo que toma como base el número irracional $e = 2{,}7182\ldots$ es muy usado en ciencias físico-matemáticas. Se llama logaritmo natural o neperiano, en homenaje a John Nepper, que fue su descubridor. La convención es usar el símbolo ln en lugar de log.

Ejercicio 22:

a. Hallar con la calculadora los valores que se indican los siguientes logaritmos:

$\log 267 =$	$\log 26{,}7 =$	$\log 2{,}67 =$
$\log 0{,}267 =$	$\log 0{,}0267 =$	$\log 0{,}0008 =$
$\ln 328 =$	$\ln 3{,}28 =$	$\ln 345 =$

b. El valor de a:

$\log a = -3{,}5$	$\log a = 0{,}8248$	$\log a = 9{,}8248$
$\ln a = 7{,}3216$	$\ln a = 18{,}35$	$\ln a = -32$

Generalmente es más fácil trabajar con la expresión exponencial. En consecuencia, cuando surge un problema relativo a $y = \log x$, con frecuencia es conveniente convertir la expresión en la forma exponencial.

Por ejemplo, para calcular el valor de $\log_4 16$ escribimos
$y = \log_4 16$

Pasamos a la forma exponencial

$4^y = 16$

Reescribimos ambos miembros usando la misma base

$2^{2 \cdot y} = 2^4$

Usando la propiedad de potencia de igual base, igualamos los exponentes

$2y = 4$ de donde $y = 2$

Ejercicio 23:

Resolver las siguientes ecuaciones
$\log_{\frac{1}{2}} 4 = x$
$\log 3x = 5$

Propiedades de los logaritmos

Sean a, m, p números reales positivos y $a \neq 1$

a. $\log_a(m \cdot p) = \log_a m + \log_a p$
b. $\log_a\left(\frac{m}{P}\right) = \log_a m - \log_a P$
c. $\log_a(m^r) = r \cdot \log_a m$; $\forall r \in \mathbb{R}$
d. $a^{\log_a r} = r$; $\forall\ r \in \mathbb{R}\, y\ \ r > 0$
e. Si $m < p$, entonces $\log_a m < \log_a p$ si $a > 1$
f. Si $m < p$, entonces $\log_a m > \log_a p$ si $0 < a < 1$
g. Si $\log_a b = \log_a c$ entonces $b = c$

Veamos algunas aplicaciones:
La propiedad **f.** nos permite afirmar que el $\log 836$ es un numero entre 2 y 3 porque $2 = \log 100$; $3 = \log 1000$ y $100 < 836 < 1000$
La propiedad **b.** nos permite calcular logaritmos de fracciones, como

$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 1 - \log_2 4 = 0 - 2 = -2$$

La propiedad **c.** nos permite simplificar expresiones como: $\log 10^{3x} = 3x \log 10 = 3x$

Antes de la utilización de las calculadoras científicas el logaritmo nos permitía resolver cálculos complejos como $x = \frac{16 \cdot \sqrt[5]{128}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \sqrt{8}}$ veamos como:

Aplicando logaritmo en base 2 a ambos lados de la igualdad:

$$\log_2 x = \log_2 \frac{16 \cdot \sqrt[5]{128}}{\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \sqrt{8}}$$

$$\log_2 x = \log_2 16 + \frac{1}{5}\log_2 128 - 3\log_2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2 8$$

$$\log_2 x = 4 + \frac{1}{5} \cdot 7 - 3 \cdot (-1) - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{69}{10}$$

Luego $x = 2^{\frac{69}{10}} \cong 119{,}42$

Con la aparición de las calculadoras estos cálculos pueden resolverse sin necesidad de aplicar propiedades de los logaritmos, es por ello que utilizaremos dichas propiedades para simplificar expresiones y resolver ecuaciones.

Práctica del capítulo 1

Ejercicio 1: Resolver los siguientes cálculos:

a. $16 : (-2) - (-4 + 2) + 5 \cdot (-1) =$

b. $(-3 + 5) \cdot \big(-1 - (-1)\big) + 4 \cdot [-5 + 4 \cdot (-2 + 7)] =$

c. $\frac{16 : [-3 - 22 : (-2)] - (-2)}{4 - (-5 + 2) - \big(10 + (-5)\big) : (-5) + 4 \cdot (-2)} =$

Ejercicio 2:

a. Determinar todos los divisores de: 50, 28, 73
b. ¿Cuál es el menor múltiplo de 8 mayor que 128?
c. ¿Cuál es el menor número natural por el que hay que multiplicar a 504 para que resulte un cuadrado perfecto?

Ejercicio 3: Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

a. Un número es primo si solo es divisible por sí mismo.
b. Todos los números pares son compuestos.
c. El producto de dos números primos es un número compuesto.
d. 1 y -1 son los únicos que tienen inverso en el conjunto de los números enteros.
e. La suma de dos números primos siempre es un número primo.

Ejercicio 4: Al dividir un número natural por 11, se obtiene resto cinco.

a. ¿El número, es múltiplo de 11?
b. ¿Cuál es el menor número que hay que sumarle para obtener un múltiplo de 11?
c. ¿Y el menor que hay que restarle?

Ejercicio 5:

a. Escribir dos fracciones que sean respectivamente equivalentes a las dadas y que tengan el mismo denominador:

$\frac{1}{3}\ y\ \frac{2}{5} =$

$\frac{5}{9}\ y\ \frac{7}{27} =$

$\frac{11}{4}\ y\ \frac{7}{12} =$

b. Escribir fracciones equivalentes a las dadas en cada caso, donde el denominador sea el m.c.m. de los denominadores de las fracciones dadas:

$\frac{5}{33}\ y\ \frac{7}{110} =$

$\frac{37}{3^5.2^2.7^3}\ y\ \frac{11}{3^4.2^5.7^2} =$

Ejercicio 6:

¿Qué condición ha de cumplir una fracción para que pueda transformarse en un decimal exacto? ¿Y para que genere un decimal periódico?

Ejercicio 7: Clasificar los siguientes números racionales en decimales exactos y decimales periódicos (Dar la respuesta sin efectuar la división).

$\frac{1}{3};\ \frac{2}{5};\ \frac{3}{4};\ \frac{5}{8};\ \frac{7}{6};\ \frac{23}{10};\ \frac{13}{5};\ \frac{4}{9}$

Ejercicio 8: Expresar en forma de fracción:

a. $25,\widehat{8}$
b. $4,25$
c. $4,2\widehat{5}$
d. $3,04\widehat{7}$
e. $0,1\widehat{52}$
f. $1,231\widehat{54}$

Ejercicio 9: Calcular:

a. $7-\left(-\frac{8}{3}\right)=$

b. $7-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=$

c. $\frac{3}{5}-\frac{4}{6}-2=$

d. $-\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{6}\right)=$

e. $\frac{5}{6}:\frac{15}{4}=$

f. $\left(-\frac{12}{15}\right):\left(-\frac{14}{27}\right)=$

g. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\cdot(-3)^{-1}=$

h. $\left(\frac{3}{4}\right)^{2}:\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}=$

i. $5\cdot\left(-1-\frac{1}{4}\right)^{-1}=$

j. $\left(-\frac{3}{4}\right)^{3}\cdot\left(\frac{4^4}{3}\right)$

k. $3-5\cdot\frac{1-\frac{1}{3}}{2+\frac{1}{2}}=$

l. $7-2\cdot\frac{2-1}{2-\frac{1}{5}}=$

m. $3\cdot(-3)-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=$

n. $\frac{50+(-32)}{-(8-10)}\cdot\frac{5}{3}=$

o. $\frac{(-9)\cdot4\cdot(-5)}{5}-\frac{2}{(-3)\cdot(-6)}=$

Ejercicio 10: Calcular

a. $0,\overline{4}+0,\overline{3}+0,\overline{2}$

b. $3{,}0\overline{7}-1{,}6\overline{7}$

c. $2{,}1\overline{5}-1{,}4\overline{8}$

d. $0,\overline{6}\cdot0,\overline{5}$

e. $2{,}1\overline{2}:0{,}1\overline{4}$

Ejercicio 11: Resolver

a. $\frac{2a-1}{a}+\frac{1}{a}$

b. $\frac{5}{x}-\frac{5}{x-1}$

c. $\frac{3}{5x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{2xy}$

d. $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$

Ejercicio 12: Resolver los siguientes problemas

a. Un automovilista hace un viaje en 2 etapas. En la primera consume $\frac{1}{5}$ de la nafta que llevaba el tanque y en la segunda $\frac{1}{4}$ de lo que le quedaba, llegando al final del trayecto con 30 litros. ¿Con cuántos litros emprendió el viaje?

b. Un escritor escribió un libro en tres meses. En el primero escribió $\frac{3}{7}$ del libro, en el segundo $\frac{1}{4}$ de lo que le quedaba. ¿Qué parte del libro escribió en el tercer mes?

c. Gabriel tiene \$18, que son $\frac{2}{5}$ del dinero que le regalaron. ¿Cuánto dinero le dieron a Gabriel?

d. En una carrea de bicicletas, uno de los ciclistas tarda 16 minutos en recorrer $\frac{4}{5}$ del circuito y el otro invierte 14 minutos en recorrer $\frac{2}{3}$ del mismo circuito. ¿Cuál de los ciclistas gana la carrera?

Ejercicio 13: Determinar cuánto debe valer n para que se verifique la igualdad

a. $0{,}000000123 = 1{,}23 \times 10^n$

b. $43560000000000000 = 4{,}356 \times 10^n$

Ejercicio 14: Colocar los exponentes para que sean correctas las igualdades

a. $2540{,}187 = 2{,}540187 \times 10 = 25401870000 \times 10$

b. $0{,}0000215 = 2{,}15 \times 10 = 0{,}00215 \times 10$

Ejercicio 15: Resolver

a. $\sqrt{8} + 5\sqrt{2}$

b. $\sqrt{18} - 5\sqrt{20}$

c. $3\sqrt{5} - 2\sqrt{45} + \sqrt{20}$

d. $\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{54}$

e. $\sqrt{8} \cdot \sqrt[3]{2}$

f. $5\sqrt{3} - 2\sqrt{6}\left(1 - \sqrt{8}\right)$

g. $\frac{2-2\sqrt{2}}{2}$

h. $\frac{3\sqrt{27}-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

i. $\frac{5\sqrt{27}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{27}-3\sqrt{3}}$

Ejercicio 16: Racionalizar los denominadores

a. $\frac{3}{\sqrt{2}-1}$

b. $\frac{5}{\sqrt{5}}$

c. $\frac{2x}{\sqrt{x}}$

d. $\frac{4}{3\sqrt{2}}$

e. $\frac{4}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}}$

f. $\frac{5}{3\sqrt{2}-1}$

Ejercicio 17:

¿Cuál es el perímetro de un rectángulo cuya base mide $\sqrt{8}$ y su altura es $1 + \sqrt{2}$? ¿Cuál es la medida de su área?

Ejercicio 18: Calcular, sin usar la calculadora

a. $\sqrt{1,6 \cdot 10^5}$

b. $\sqrt[4]{0,0001}$

c. $\sqrt{2,5 \cdot 10^{-3}}$

Ejercicio 19: Aplique propiedades de logaritmo para desarrollar las siguientes expresiones:

a. $\log_4(x.z)$

b. $\log\frac{y}{x}$

c. $\log\frac{y^5w^2}{x^4z^3}$

d. $\ln\sqrt[4]{\frac{x^7}{y^5z}}$

Ejercicio 20: Sabiendo que $\log_3 8 = 1{,}9$, calcule el valor aproximado de:

a. $\log_3 24$

b. $\log_3 64$

c. $\log_3 2$

Ejercicio 21: Simplifique cada expresión al logaritmo de una sola cantidad:

a. $\ln 6 + \ln x$

b. $\log x - \log 5$

c. $2\log_3 x + \log_3 m$

d. $2 + \log_5 x$

e. $\frac{2}{3}\log_2 x - \log_2 y + \log_2 r$

f. $-\log_2 z - \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 y$

2. ECUACIONES - FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS

Para comenzar este capítulo debemos primero definir los dos conceptos fundamentales que son el de ecuación y función. Esta conceptualización nos permitirá diferenciar ambos términos.

2.1. Definición de ecuación:

Una ecuación es una igualdad matemática entre dos expresiones denominadas miembros y separadas por el signo igual, en las que aparecen elementos conocidos o datos y elementos desconocidos o incógnitas relacionadas mediante operaciones matemáticas.

Las ecuaciones pueden clasificarse según el número de incógnitas que incluyan o por las operaciones que afecten a estas incógnitas. Decimos que una ecuación es de una sola incógnita cuando solo aparece un valor desconocido, y si aparecen dos es de dos incógnitas, y si aparecen n valores desconocidos será de n incógnita.

Según las operaciones que afectan a las incógnitas las ecuaciones se clasifican en algebraicas y trascendentes. Se llaman algebraicas cuando las incógnitas están afectadas de alguna de las operaciones algebraicas conocidas como: suma, resta, multiplicación, división, potenciación y /o radicación. Si las incógnitas están afectadas de operaciones que trascienden el campo del algebra se llaman trascendente, las ecuaciones logarítmicas, exponenciales o trigonométricas son algunos ejemplos de ellas.

Ejemplos:

a. ecuación algebraica: $3x^2 - \frac{3}{x} = \sqrt{2x-1}$

b. ecuación trascendente: $\ln(x+y) = 4$

2.2. Definición de función

Una función f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto A exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto B

El conjunto A recibe el nombre de dominio.

El conjunto B recibe el nombre de conjunto de llegada.

En general consideramos funciones para las cuales los conjuntos A y Bson conjuntos de números reales.

Utilizamos la letra "x" para representar a cada elemento del dominio, y la letra "y" para representar a cada elemento del conjunto de llegada.

x: variable independiente
y: variable dependiente

Utilizamos las letras f g h o t para designar las funciones y a la relación funcional la escribiremos: $y = f(x)$ Esta igualdad se lee “y es igual a f de x” o bien “y es la imagen de x mediante la función f ”.

El Rango de f es el conjunto de todos los valores $f(x)$ correspondientes a cada uno de los elementos del dominio.
Rango = $\{f(x) | x \in A\}$

Las funciones se pueden representar en distintas formas:

Forma verbal (mediante una descripción coloquial).

Forma algebraica (por medio de una fórmula explícita).

Forma visual (con una gráfica).

Forma numérica (a través de una tabla de valores)
Una función puede ser representada en las cuatro formas, y muy seguido es útil pasar de una a otra para comprender mejor la relación. Sin embargo, algunas funciones son expresadas de manera más directa mediante una forma particular en lugar de cualquier otra.

Un ejemplo de una función descrita en forma verbal es "La población del mundo es función del tiempo responde a $P(t)$". Por otro lado, una representación útil del área de un círculo como función de su radio es la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$

2.3. Ecuaciones lineales

Definición

Una ecuación con una incógnita se dice lineal o de primer grado, cuando el mayor exponente con que figura la incógnita es uno.
Así $ax + b = 0$ con $a, b \in R$ y $a \neq 0$ es una ecuación lineal.

Para resolver una ecuación lineal realizamos operaciones en ella hasta que tenemos una ecuación equivalente.
Se dice que dos ecuaciones son equivalentes, si tienen las mismas soluciones.
Para resolver una ecuación, intentamos determinar una que sea más simple y equivalente, y que tenga la variable sola en uno de los lados del signo *igual*. A continuación se presentan las propiedades que utilizamos para resolver una ecuación. (En éstas,A, B y c representan cualquier expresión algebraica, y el símbolo (⇔) significa "es equivalente a").

Propiedades de la igualdad

Propiedad	Descripción
$A = B \Leftrightarrow A + c = B + c$	Al sumar la misma cantidad a ambos lados, se obtiene una ecuación equivalente.
$A = B \Leftrightarrow A \cdot c = B \cdot c \;\; (c \neq 0)$	Multiplicando ambos lados por una misma cantidad diferente de cero, se obtiene una ecuación equivalente

Ejemplos:

a. Resolver: $5x - 6 = 3x$

Solución: Empezamos por dejar los términos que implican a x en un lado y las constantes en el otro.

$$
\begin{aligned}
5x - 6 &= 3x & & \\
5x - 6 + (-3x) &= 3x + (-3x) & & \text{(Sumando } -3x \text{ a ambos miembros)} \\
2x - 6 &= 0 & & \text{(Simplificando)} \\
2x - 6 + 6 &= 0 + 6 & & \text{(Sumando 6 a ambos miembros)} \\
2x &= 6 & & \text{(Simplificando)} \\
\frac{2x}{2} &= \frac{6}{2} & & \text{(Dividiendo ambos miembros entre 2)} \\
x &= 3 & &
\end{aligned}
$$

b. Resolver: $2(p+4)=7p+2$

Solución: Primero quitamos los paréntesis

$$\begin{aligned} 2(p+4) &= 7p+2 && \\ 2p+8) &= 7p+2 && \text{(Propiedad distributiva)} \\ 2p+8-8 &= 7p+2-8 && \text{(Restando 8 a ambos miembros)} \\ -5p &= -6 && \text{(Restando } 7p \text{ de ambos miembros)} \\ p &= \frac{-6}{-5} && \text{(Dividiendo ambos miembros entre -5)} \\ p &= \frac{6}{5} && \end{aligned}$$

c. Resolver: $\frac{7x+3}{2}-\frac{9x-8}{4}=6$

Solución: Primero eliminamos las fracciones multiplicando ambos lados de la ecuación por el mínimo común denominador, que es 4

$$\begin{aligned} 4\cdot\left(\frac{7x+3}{2}-\frac{(9x-8)}{4}\right) &= 4\cdot 6 && \\ 4\cdot\frac{7x+3}{2}-4\cdot\frac{9x-8}{4} &= 24 && \text{(propiedad distributiva)} \\ 2\cdot(7x+3)-(9x-8) &= 24 && \text{(simplificando)} \\ 14x+6-9x+8 &= 24 && \text{(propiedad distributiva)} \\ 5x+14 &= 24 && \text{(simplificando)} \\ 5x &= 10 && \text{(restando 14 de ambos miembros)} \\ x &= 2 && \text{(dividiendo ambos miembros entre 5)} \end{aligned}$$

Ejercicio 1:

Resolver las siguientes ecuaciones.

a. $7x+7=2(x+1)$

b. $5+\frac{4x}{9}=\frac{x}{2}$

Solución de problemas mediante ecuaciones

Ejemplo:

Resolvamos el siguiente problema

a. El tiempo que permanece encendida la luz amarilla de un semáforo es un segundo más largo que 0,05 veces el límite de velocidad de la calle que éste controla. ¿Cuál es el tiempo de encendido de la luz amarilla de un semáforo que controla una calle con un límite de velocidad de 30 mi/h?

Solución:

Datos: La luz amarilla permanece encendida 0,05 veces el límite de velocidad más 1 segundo. El tiempo de encendido es 1 segundo más largo que 0,05 veces el límite de velocidad.
Escribimos este enunciado en símbolos: $y=1+0{,}05\cdot s$

Para un límite de velocidad de 30 mi/h, s sería igual a 30. De este modo tenemos lo siguiente:

$y = 1 + 0{,}05(30)$

$y = 1 + 1{,}5$

$y = 2{,}5$

Respuesta: En una calle con un límite de velocidad de 30 mi/h, 2,5 segundos es un tiempo razonable de encendido para la luz amarilla.

2.4. Función Lineal

A la función polinómica de primer grado $f(x) = ax + b$ siendo a y b números reales, se la denomina función lineal.

La representación gráfica de una función lineal es una recta.

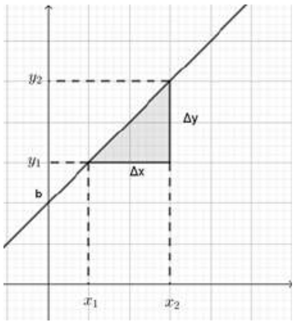
El número a se llama pendiente de la recta y mide la inclinación de la misma respecto de la horizontal.

El número b recibe el nombre de ordenada al origen y es la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje y.

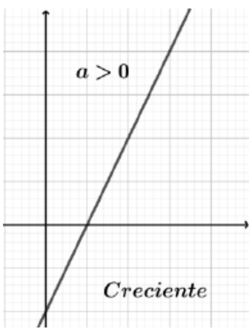
Ecuación explicita de la recta: $y = f(x) = ax + b$

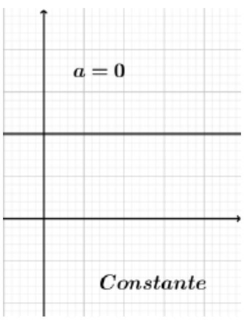
La pendiente de una recta es el cociente entre la variación de la variable dependiente (Δy) y la variación de la variable independiente (Δx) de cualquier punto de la misma.
$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

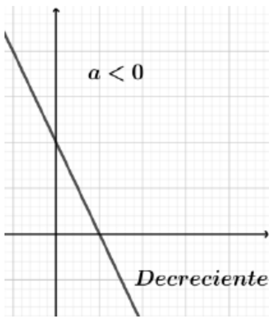
La ordenada al origen es el valor donde la recta corta al eje y.
$f(0) = b$



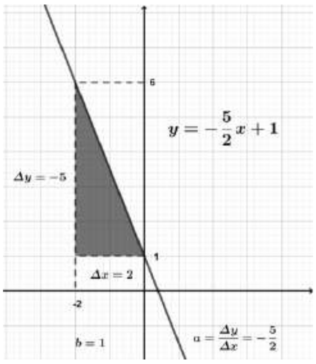
El valor de la pendiente determina que una función lineal sea **creciente, constante o decreciente**.

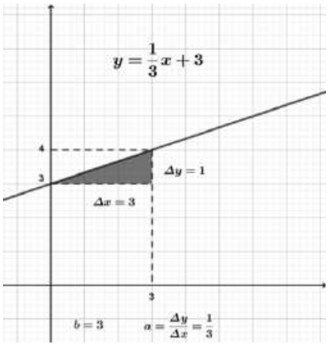






Representación gráfica de una función lineal
Para graficar una función lineal se debe marcar la ordenada al origen (b) y, a partir de ella, representar un par de valores cuyo cociente sea igual al valor de la pendiente (a) como se muestra a continuación.





Ejercicio 2:

Representar las siguientes funciones a partir de la ordenada al origen y la pendiente.

a. $y = \frac{1}{2}x$

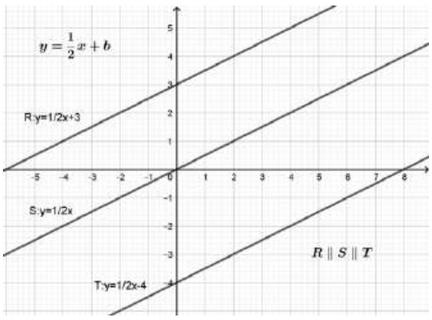
b. $y = -x + 2$

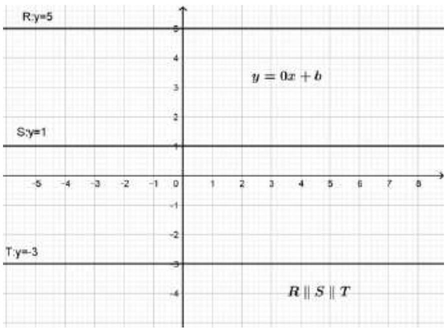
c. $y = \frac{2}{3}x - 1$

d. $y = -\frac{1}{4}x + 3$

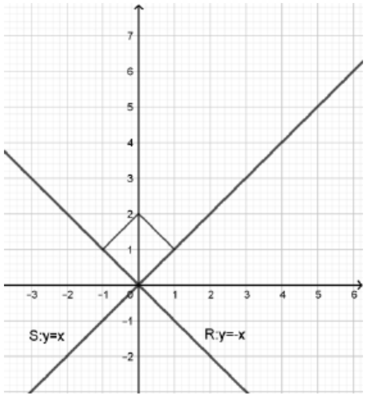
2.5. Perpendicularidad y Paralelismo entre rectas

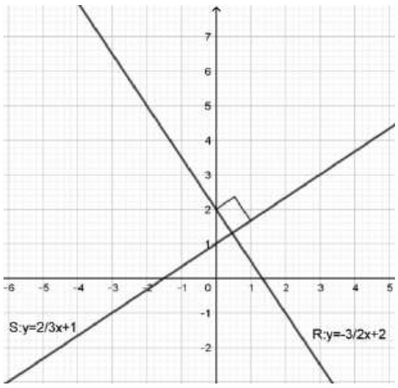
Rectas paralelas
Dos rectas son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales.
$M: y = a_1x + b_1 \ \wedge \ P: y = a_2x + b_2 \ \wedge M \parallel P \Leftrightarrow a_1 = a_2$





Rectas perpendiculares
Dos rectas son perpendiculares si y solo si sus pendientes son inversas y opuestas.
$S: y = a_1x + b_1 \ \wedge \ N: y = a_2x + b_2 \ \wedge S \perp N \Leftrightarrow a_1 = -\frac{1}{a_2}$





Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2\,;1)$ y es paralela a $y = 5x + 1$.
$x = 2 \quad \wedge \quad y = 1 \quad \wedge \quad a = 5$
$y = ax + b \implies 1 = 5 \cdot 2 + b \implies 1 = 10 + b \implies b = -9$
$y = 5x - 9$

Ejercicio 3:

a. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(-1; 3)$ y es perpendicular a $y = -2x + 1$.

Ejercicio 4:

Escribir V (verdadero) o F (falso) según corresponda en cada caso.

a. $y = 2x + 1 \parallel y = 2$	
b. $y = \frac{1}{3}x \perp y = -3x + 2$	
c. $y = x - 1 \parallel y = -x + 1$	
d. $y = 2 \parallel y = -5$	
e. $y = 1 - x \perp y = -1 + x$	
f. $y = 3 \perp y = -\frac{1}{3}$	

2.6. Ecuación de una recta, dadas la pendiente y un punto de la misma

La fórmula para hallar la ecuación de una recta, dada su pendiente a y un punto perteneciente a la misma $(x_1;\ y_1)$ es:
$y - y_1 = a(x - x_1)$

Ejemplo:

La ecuación explicita de una recta cuya pendiente es 2 y pasa por el punto (1; 3) es:

$y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 3 = 2x - 2 \Rightarrow y = 2x - 2 + 3 \Rightarrow y = 2x + 1$

2.7. Ecuación de una recta, dados dos puntos de la misma

La fórmula para hallar la ecuación de una recta, dados dos puntos pertenecientes a ellas:

$(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

La ecuación explicita de una recta que pasa por los puntos (2; 1) y (5; 3) es:

$$\frac{y-1}{3-1} = \frac{x-2}{5-2} \Rightarrow \frac{y-1}{2} = \frac{x-2}{3} \Rightarrow y - 1 = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) \cdot 2 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$

2.8. Sistemas de Ecuaciones Lineales

Dos ecuaciones con dos incógnitas

Ejemplo:

Victoria se encontró con su amiga Magdalena y le comentó: Me compré una camisa muy linda y una remera. ¿Cuánto te costó cada cosa?, le preguntó Magdalena. No dispuesta a satisfacer fácilmente la curiosidad de su amiga, Victoria respondió en forma enigmática: Sé que en total gasté \$100 y que con lo que pagué la camisa hubiera podido comprar exactamente 3 remeras. ¿Cómo podemos calcular el precio de cada prenda?
Llamamos: "x" al precio de la camisa e "y" al precio de una remera
Traducimos el problema planteando dos ecuaciones $\begin{cases} x + y = \$100 \\ x = 3y \end{cases}$
Existen infinitos pares de valores que satisfacen la primera ecuación, es decir, que suman \$100. Por ejemplo: x = \$70 e y = \$30; x = \$75 e y = \$25; x = \$80 e y = \$20.
También son infinitos los pares de valores que cumplen la segunda ecuación, donde un valor es igual al triple del otro.
Por ejemplo: x = \$60 e y = \$20; x = \$75 e y = \$25. Pero existe un único par que satisface las dos ecuaciones, y es x = \$75 e y = \$25.
Por lo tanto el precio de la camisa es \$75 y el de la remera \$25.
En este problema hemos hallado el valor de dos incógnitas que llamamos x e y.
Por tener que cumplir el problema dos condiciones hemos planteado dos ecuaciones y por estar sus incógnitas elevadas a la primera potencia; las llamamos lineales.
Para expresar que estas condiciones deben cumplirse simultáneamente, hemos formado un sistema.
Dadas las características de este problema, hemos resuelto un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas.

2.9. Métodos para resolver un sistema de ecuaciones

Método de igualación

Ejemplo:

En un teatro hay 500 butacas entre platea y pullman. En un día de función a sala llena, se recaudaron \$22000. Si los precios de cada butaca en platea y pullman son respectivamente \$50 y \$30, ¿cuántas butacas de cada clase hay en ese teatro?
Llamamos:
x al número de butacas en platea
y al número de butacas en pullman.

Traducimos el enunciado del problema planteando el siguiente sistema, en este caso despejamos x; pero puede hacerse despejando y:

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 50x + 30y = 22000 \end{cases}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones podemos utilizar distintos métodos que iremos viendo a lo largo de este capítulo.

Comenzamos despejando una misma incógnita de las dos ecuaciones, en este caso despejamos x; pero puede hacerse despejando y.
De la primera ecuación: $x = 500 - y$

De la segunda ecuación: $x = \frac{22000-30y}{50}$
El valor de x representa, en nuestro problema, el número de plateas que es el mismo para las dos ecuaciones; por lo tanto, podemos igualar los segundos miembros de las igualdades obtenidas.

$$500 - y = \frac{22000 - 30y}{50}$$

$$50 \cdot (500 - y) = 22000 - 30y$$

Observen que hemos obtenido una ecuación con una sola incógnita que es y, por lo tanto, podemos hallar su valor.

$$25000 - 50y = 22000 - 30y$$

$$25000 - 22000 = -30y + 50y$$

$$3000 = 20y$$

$$\frac{3000}{20} = y$$

$$y = 150$$

Reemplazamos y por el valor hallado en alguna de las dos ecuaciones obtenidas al despejar x en.

$$x = 500 - y$$

$$x = 500 - 150$$

$$x = 350$$

Respuesta: En el teatro hay 350 butacas en platea y 150 butacas en pullman.

Ejercicio 5:
Si al comienzo hubiéramos despejado y de las dos ecuaciones, ¿se obtiene el mismo resultado?

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de igualación, primero despejamos la misma incógnita de las dos ecuaciones y luego, igualamos las expresiones obtenidas en el paso anterior.

Método gráfico. Clasificación de sistemas

Ejemplo:
Sergio y Luis deben llegar juntos a la casa de Carlos para darle un regalo de cumpleaños. Sergio vive a 32 km de la casa de Carlos y se dirige hacia allí en auto, a una velocidad constante de 60 km/h. Luis vive en la misma ruta que Sergio, pero 10 km más cerca de la casa de Carlos, y va hacia ésta en moto, a una velocidad constante de 40 km/h.

Los dos amigos combinan el encuentro por teléfono y salen simultáneamente de sus casas. Averigüen si el encuentro se produce antes de llegar a la casa de Carlos y cuántos km fa1tan para llegar. ¿Al cabo de cuánto tiempo se produjo dicho encuentro?
Llamamos:
t al tiempo que tardan Sergio y Luis en encontrarse;
d a la distancia recorrida por Sergio en el tiempo t;
$(d - 10)$ a la distancia recorrida por Luis en el tiempo t.

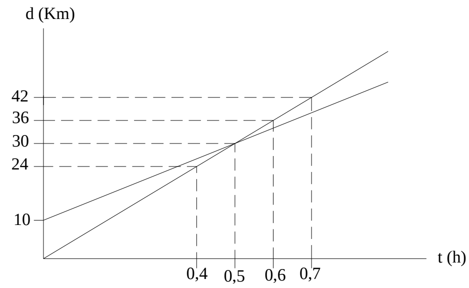
Planteando las ecuaciones de movimiento de los dos amigos, obtenemos el siguiente sistema:
$\begin{cases} d = 60t \\ d - 10 = 40t \end{cases}$ o bien $\begin{cases} d = 60t \\ d = 40t + 10 \end{cases}$

Observen que cada una de estas ecuaciones expresa una función lineal de variable t que podemos representar gráficamente:

Para Sergio					
t (horas)	0	0,4	0,5	0,6	0,7
d (km)	0	24	30	36	42

Para Luis					
t (horas)	0	0,4	0,5	0,6	0,7
d (km)	10	26	30	34	38

Observen que el encuentro entre ambos amigos es el punto de intersección de ambas rectas.
En el gráfico, vemos que Sergio y Luis se encontraron en t = 0,5 horas, o sea, luego de media hora y a una distancia de la partida d = 30 km y les faltaban 2 km para llegar a la casa de Carlos.



Para resolver un sistema con dos incógnitas x e y, despejamos y de ambas ecuaciones y graficamos las funciones lineales que se obtienen.

$S = \{(0{,}5\,;30)\}$

La solución del sistema es el punto de intersección de las rectas que resultan en ese gráfico.

Por tener solución, el sistema del ejemplo dado es compatible y, por ser única esta solución, el sistema es determinado.

Ejercicio 6:

Resuelvan los siguientes sistemas por igualación y verifiquen gráficamente la solución obtenida.

a. $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x + 5 = 2y \\ y - 4x = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 0{,}5x - 3y = 1 \\ x - y = -3 \end{cases}$

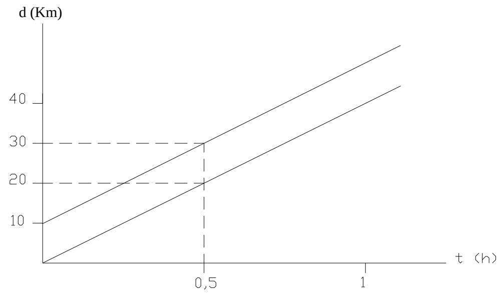
d. $\begin{cases} 5x - y = 1 \\ x + y - 11 = 0 \end{cases}$

Ejemplo:
Pensemos en un problema similar al anterior en el que los dos amigos salen de los mismos lugares que antes pero a igual velocidad, por ejemplo, a 40 km/h.
Las ecuaciones de movimiento y el gráfico correspondiente serán:

$$\begin{cases} d = 40t \\ d = 40t + 10 \end{cases}$$

t (horas)	0	0,5	...
d = 40t km)	0	20	...

t (horas)	0	0,5	...
d = 40t (km)	10	30	...

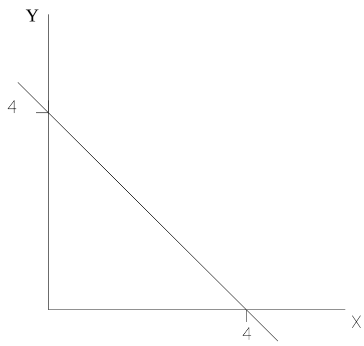


Es lógico pensar que, como van a la misma velocidad y uno sale 10 km delante del otro, nunca se van a encontrar.
Si no hay encuentro, el sistema no tiene solución, es incompatible.
Veamos qué sucede al resolver analíticamente este sistema por igualación:
Como $d = d \Rightarrow 40t = 40t + 10$
$40\text{t} - 40\text{t} = 10$
$0\text{t} = 10$
$0 = 10$ Absurdo

No existen valores de t y d que cumplan estas ecuaciones simultáneamente.
Decimos que el sistema no tiene solución o que el conjunto solución es vacío. $S = \{\ \}$

Respuesta: Los amigos, con estas condiciones, no se encuentran.

Ejemplo:
Resolvamos otra situación analítica y gráficamente.
Compré un cuaderno y un lápiz por \$4. Si 2 lápices y 2 cuadernos del mismo tipo cuestan \$8, ¿cuál es el precio de cada cosa?



El sistema que resulta es: $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$

Despejamos y de ambas ecuaciones para aplicar el método gráfico:

$$\begin{cases} y = 4 - x \ \rightarrow Recta\ R_1 \\ y = \frac{8-2x}{2} \rightarrow Recta\ R_2 \end{cases}$$

En el gráfico hemos obtenido dos rectas coincidentes R_1 y R_2por lo tanto, la intersección es el conjunto de infinitos puntos que pertenecen a cualquiera de ellas.
$S = R_1 = R_2$. El sistema tiene infinitas soluciones, y es indeterminado.
$S = \{(x;\ 4\ -\ x)\}$

Volviendo al problema, vemos que hay finitos precios de los lápices y cuadernos que cumplen las condiciones del problema; son todos los pares que se forman con $0 < x < 4$ y $x \in R$, ya que no tiene sentido considerar precios negativos.
De los ejemplos anteriores podemos hacer la siguiente síntesis:

Si un sistema tiene solución, es compatible y si no la tiene, es incompatible. .
Si un sistema tiene solución única, es determinado y si tiene infinitas soluciones, es indeterminado.

Método de sustitución
Averiguar dos números que cumplan con las siguientes condiciones:
La suma entre el doble del primero y el triple del segundo es 9, y la diferencia entre el cuádruple del primero y el segundo es 11.
Llamando x al primer número e y al segundo, obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x - y = 11 \end{cases}$$

Recuerden que si en un sistema de ecuaciones se despeja una incógnita y la expresión resultante se reemplaza en las demás ecuaciones, el sistema obtenido es equivalente al primero. Por lo tanto, vamos a despejar una incógnita de alguna de las dos ecuaciones y luego, la sustituimos en la otra ecuación.

Despejamos x de la primera ecuación: $x = \frac{9-3y}{2}$

Sustituimos x por su valor en la segunda ecuación: $4 \cdot \left(\frac{9-3y}{2}\right) - y = 11$

Hemos obtenido así, una ecuación con una sola incógnita.

Resolvemos la ecuación:

$$2 \cdot (9 - 3y) - y = 11$$
$$18 - 6y - y = 11$$
$$7y = 11 - 18$$
$$y = \frac{-7}{-7}$$
$$y = 1$$

Sustituimos y por el valor hallado en el despeje de x hecho al comienzo:

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \Rightarrow x = \frac{9 - 3 \cdot 1}{2} \Rightarrow x = 3$$

$$S = \{(3; 1)\}$$

Para resolver un sistema por el método de sustitución, despejamos una incógnita de cualquiera de las dos ecuaciones y la sustituimos en la otra, obteniéndose así una ecuación con una sola incógnita que despejamos para luego encontrar la otra incógnita mediante un nuevo reemplazo.

Método de reducción por sumas o restas
Le preguntaron una vez a don Zoilo "¿cuántas gallinas y cuántas vacas hay en su campo?" A lo que él contestó muy enigmático: "La diferencia entre el número de gallinas y vacas es 30 y entre todos los animales hay 180 patas".
¿Cómo calculamos el número de animales de cada clase que tiene don Zoilo?
Llamamos: x al número de gallinas e y al número de vacas. Por lo tanto:

$$\begin{cases} x - y = 30 \\ 2x + 4y = 180 \end{cases}$$

Recuerden que si una ecuación se multiplica por un número real no nulo, se obtiene una ecuación equivalente a la primera. Esta misma regla se aplica a los sistemas de ecuaciones.

Por lo tanto, vamos a multiplicar una de las ecuaciones del sistema por un número para igualar los coeficientes de alguna de las incógnitas.

Multiplicamos la primera por 2 para igualar los coeficientes de x

$$\begin{cases} 2x - 2y = 60 \\ 2x + 4y = 180 \end{cases}$$

Restando miembro a miembro eliminamos la incógnita x

$-6y = -120$

Despejamos y

$y = \frac{-120}{-6} \Rightarrow y = 20$

Volvemos al sistema original

Multiplicamos la primera por 4 para igualar los coeficientes de x

$$\begin{cases} 4x - 4y = 120 \\ 2x + 4y = 180 \end{cases}$$

Sumamos porque los términos que tienen y son opuestos

$6\text{x} = 300$

Despejamos x

$x = 300/6 \Rightarrow x = 50$

Respuesta: En la granja de don Zoilo hay 50 gallinas y 20 vacas

Para resolver un sistema por el método de reducción multiplicamos una ecuación, si es necesario, por un número distinto de cero para igualar los coeficientes de una de las incógnitas y luego, sumamos o restamos para eliminar dicha incógnita y así, poder despejar la otra.

Ejercicio 7:

Aplicar el método de reducción para resolver los siguientes sistemas. Clasificarlos y representarlos gráficamente.

a. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 3x + 2y = -2 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 6x + 4y = 8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ 3x + 6y = 24 \end{cases}$

2.10. Ecuaciones Cuadráticas

Definición:

Se llama ecuación cuadrática a toda expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b, y c son constantes y $a \neq 0$

Resolución de ecuaciones cuadráticas

Para resolver ecuaciones cuadráticas observaremos primero si es una ecuación cuadrática completa o incompleta. Veamos los siguientes casos:

Ecuaciones cuadráticas incompletas

Ecuación cuadrática de la forma: $ax^2 + c = 0$

Para resolver este tipo de ecuaciones cuadráticas deberemos aplicar propiedades de la igualdad como hicimos en las ecuaciones lineales. Debemos prestar atención cuando elevemos al cuadrado ambos miembros.
Recordemos que $\sqrt{a^2} = |a|$

Ejemplo:
Resolver la ecuación $2x^2 - 8 = 0$
$2x^2 - 8 = 0$
$2x^2 - 8 + 8 = 0 + 8$
$2x^2 = 8$
$\frac{1}{2} \cdot 2x^2 = \frac{1}{2} \cdot 8$
$x^2 = 4$
$|x| = 4$
$x = \pm 4$

Ecuación cuadrática de la forma: $ax^2 + bx = 0$
En este caso podremos observar que ambos términos del primer miembro tienen en común la incógnita. Es por ello que podremos rescribir la ecuación de la forma $x(ax + b) = 0$, observando que hemos sacado x como factor común.
Recordando la propiedad:
$Si\ a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0\ \vee b = 0$

Ejemplo:
Resolver la ecuación $2x^2 + 3x = 0$
$2x^2 + 3x = 0$
$x(2x + 3) = 0$
$x = 0 \vee 2x + 3 = 0$
$x = 0 \vee x = -\frac{3}{2}$

Ecuación cuadrática completa: $ax^2 + bx + c = 0$
En este caso no podremos valernos de ninguna de las técnicas anteriores para resolver una ecuación de este tipo. Utilizaremos una técnica denominada “completar cuadrados”.
Primero recordemos el cuadrado de un binomio:

$(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$

Coloquialmente el cuadrado de un binomio podemos afirmar que es igual al cuadrado del primer término más el doble del producto de ambos términos más el cuadrado del segundo término.
Para comenzar dividiremos nuestra ecuación cuadrática por a y pasaremos el término independiente que le quede al otro miembro
$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
Ahora establezcamos relaciones con el trinomio cuadrado perfecto

$x^2 = m^2 \Longrightarrow x = m$
$2mn = \frac{b}{a}x$
Pero por como dijimos que $m = x$
$2n = \frac{b}{a}$

Por lo que $n = \left(\frac{b}{a}\right) : 2$, o dicho de otro modo el segundo miembro del binomio es igual a la mitad de coeficiente lineal.
Esto quiere decir que si sumamos en ambos miembros de la ecuación el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal, el primer miembro resultara ser un trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo:

$x^2 + 2x - 3 = 0$
En este caso no es necesario dividir por el coeficiente cuadrático porque es 1.

$x^2 + 2x = 3$
Sumamos el cuadrado de la mitad del coeficiente lineal o sea, sumamos el cuadrado de la mitad de 2

$x^2 + 2x + 1^2 = 3 + 1^2$

Ahora el primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto

$(x + 1)^2 = 4$

$\sqrt{(x + 1)^2} = \sqrt{4}$

$|x + 1| = 2$

$x + 1 = \pm 2$

$x = 1 \vee x = -3$

Ejemplo:

$4x^2 + 12x - 7 = 0$
Multiplicamos ambos miembros por $\frac{1}{4}$

$x^2 + 3x - \frac{7}{4} = 0$

$x^2 + 3x = \frac{7}{4}$

Sumamos $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ para completar el cuadrado

$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{7}{4} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 4$

$\left|x + \frac{3}{2}\right| = 2$

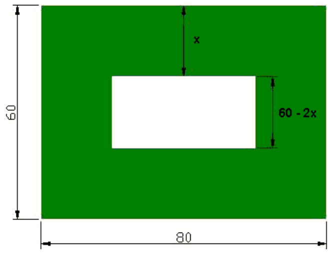
$x + \frac{3}{2} = 2$ o $x + \frac{3}{2} = -2$

$x = \frac{1}{2}$ o $x = -\frac{7}{2}$

Solución de problemas: Empleo de ecuaciones cuadráticas
Para algunos problemas, una ecuación cuadrática hará las veces de modelo matemático.

Ejemplo:
Un prado rectangular de 60 m por 80 m es excavado para hacer una piscina en su interior, dejando una franja de césped de ancho uniforme en torno a la misma. El área de la piscina es $\frac{1}{6}$; del prado. ¿Cuál es el ancho de la franja de césped?

Datos: Las dimensiones del prado son 60 m por 80 m.
La piscina cubre la sexta parte del área total.
En primer lugar, dibujemos un diagrama. Sea x el ancho del césped, entonces
Área total = 60 x 80
Área de la piscina = $(60 – 2x) (80 – 2x)$



El área de la piscina es $\frac{1}{6}$ del área total del prado.

Por lo tanto:

$$(60-2x)(80-2x)=\frac{1}{6}\cdot 60\cdot 80$$

$$4800-160x-120x+4x^2=800$$

$$4x^2-280x+4000=0$$

$$x^2-70x+1000=0$$

$$x^2-70x+\left(-\frac{70}{2}\right)^2=-1000+\left(-\frac{70}{2}\right)^2$$

$$(x-35)^2=225$$

$$x-35=\pm 15$$

$$x=50 \text{ o } x=20$$

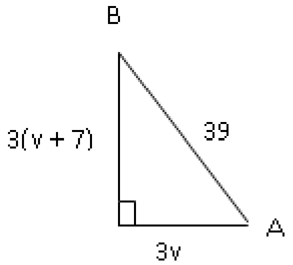
Conclusión: Podemos ver que 50 no puede ser una solución, pues cuando x es 50, 60 - $2x$, que es el ancho de la piscina, es -40. Como sabemos, el ancho de una piscina no puede ser negativo.
Un ancho de 20 metros de la franja satisface las condiciones del problema. Como el ancho debe ser menor que 60, es una respuesta razonable.

Ejemplo:

Dos ciclistas A y B parten de un punto P al mismo tiempo y en direcciones que forman un ángulo recto entre sí. B se desplaza 7 km/h más rápido que A. Después de 3 horas se encuentran a 39 km. de distancia uno del otro. Determina la velocidad de cada uno de ellos.

Solución: En primer lugar trazamos un dibujo, representando v la velocidad de A y $v+7$ la de Como ambos se desplazan durante 3 horas, sus distancias a partir de P son $3v$ y $3(v+7)$ respectivamente.

Utilizando el teorema de Pitágoras



$$[3(v+7)]^2+(3v)^2=39^2$$

$$9(v+7)^2+9v^2=1521$$

Multiplicando por $\frac{1}{9}$

$$(v+7)^2+v^2=169$$

$$v^2+14v+49+v^2=169$$

$$2v^2+14v=120$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$

$$v^2+7v=60$$

$$v^2 + 7v + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = 60 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$\left(v + \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{289}{4}$$
$$v + \frac{7}{2} = \pm\frac{17}{2}$$
$v = 5$ o $v = -12$

Respuesta: Las soluciones de la ecuación son -12 y 5. Como la velocidad no puede ser negativa, -12 no es una solución. La velocidad de A es 5 km/h y la de B es 12 km/h.

Ejercicio 8:

Dos corredores A y B parten del mismo punto P en direcciones que forman un ángulo recto entre sí. A corre 4 km/h más rápido que B. Después de dos horas se encuentran a 40 km de distancia uno del otro. Calcula la velocidad a la que se desplaza cada uno de ellos.

La fórmula cuadrática: Resolvente

Solución de ecuaciones utilizando la fórmula cuadrática
Algunas ecuaciones cuadráticas no se pueden resolver mediante factorización. A continuación mostramos una fórmula que proporciona las soluciones de cualquier ecuación cuadrática.

Las soluciones de cualquier ecuación de segundo grado en una variable del tipo:

$ax^2 + bx + c = 0$, *están dadas por la fórmula cuadrática llamada resolvente*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Demostración:

Consideraremos cualquier ecuación cuadrática de la forma $ax^2 + bx + c = 0, (a > 0)$.
Completando el cuadrado.
Multiplicando por $\frac{1}{a}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Sumando $-\frac{c}{a}$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

La mitad de $\frac{b}{a}$ es $\frac{b}{2a}$ cuyo cuadrado es $\frac{b^2}{4a^2}$ completamos el cuadrado
Sumando $\frac{b^2}{4a^2}$ a ambos miembros

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ Como $a > 0, |a| = a$

Las soluciones están dadas por $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ejemplo:

Resuelve: $3x^2 + 5x = -1$

Primero hay que encontrar la forma estándar y determinar a, b y c

$3\mathrm{x}^2 + 5\mathrm{x} + 1 = 0$; $\mathrm{a} = 3, \mathrm{b} = 5, \mathrm{c} = 1$

Después, hay que utilizar la fórmula cuadrática

$$x = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac}}}{2\mathrm{a}}$$

Sustituyendo

$$\mathrm{x} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Conclusión: Las soluciones son $\frac{-5+\sqrt{13}}{6}$ y $\frac{-5-\sqrt{13}}{6}$

Nota: Cuando se utiliza la fórmula cuadrática, las soluciones que se obtienen son soluciones de la ecuación original a menos que se haya cometido un error de cálculo.

Ejercicio 9:

Resuelve utilizando la fórmula cuadrática.

a. $3x^2 + 2x = 7$

b. $5x^2 + 3x = 9$

Cuando la expresión dentro del signo radical es negativa, la ecuación no tiene solución en el conjunto de los Reales.

Ejercicio 10:

Resuelve

a. $x^2 - x + 2 = 0$

b. $3x^2 + 2x + 2 = 0$

Soluciones de las ecuaciones cuadráticas

Ahora centraremos nuestra atención en las ecuaciones con coeficientes reales.

Discriminante

La expresión (b^2 - 4ac) de la fórmula cuadrática se llama discriminante. Con este número podemos determinar la naturaleza de las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática.

Teorema

Una ecuación $\mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} = 0$, con $\mathrm{a} \neq 0$y coeficientes reales, tiene.

a. Exactamente una raíz real si $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} = 0$.

b. Dos raíces reales si $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} > 0$.

c. Dos raíces complejas que son conjugadas entre sí cuando $\mathrm{b}^2 - 4\mathrm{ac} < 0$.

Ejemplo:
Determina la naturaleza de las raíces de $9x^2 - 12x + 4 = 0$

$a = 9, b = -12$ y $c = 4$

Calculemos el discriminante:

$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$

Por el teorema sólo hay una raíz y ésta es un número real.

Ejemplo:

Determina la naturaleza de las raíces de $x^2 + 5x + 8 = 0$.
$a = 1, b = 5$ y $c = 8$

Calculemos el discriminante.

$b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 25 - 32 = -7$

Conclusión: En vista de que el discriminante es negativo, la ecuación no tiene raíces reales. Sus raíces son complejas y conjugadas entre sí.

Ejercicio 11:

Determina la naturaleza de las raíces de cada ecuación.

a. $x^2 + 5x - 3 = 0$

b. $9x^2 - 6x + 1 = 0$

Escritura de la ecuación a partir de sus raíces

Podemos utilizar el principio de la igualdad de un producto con 0, para escribir una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean conocidas.

Ejemplo:
Escribe una ecuación cuadrática cuyas raíces sean 3 y $-\frac{2}{5}$

$\mathrm{x} = 3$ ó $\mathrm{x} = -\dfrac{2}{5}$

$\mathrm{x} - 3 = 0$ ó $\mathrm{x} + \dfrac{2}{5} = 0$

$(\mathrm{x} - 3)\left(\mathrm{x} + \frac{2}{5}\right) = 0$ (Multiplicando)

$x^2 - \dfrac{13}{5}x - \dfrac{6}{5} = 0$

$5x^2 - 13x - 6 = 0$ (Multiplicando por 5, el MCM)

Ejercicio 11:

Encuentra una ecuación cuadrática cuyas raíces sean las siguientes.

a. $-4; \frac{5}{3}$

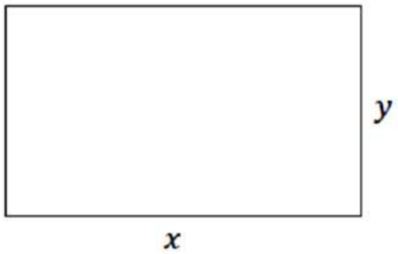
b. $-7; 8$

c. $8; -9$

d. $3 + \sqrt{2}\,;\ \ 3 - \sqrt{2}$

Funciones Cuadráticas

A la función polinómica de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, siendo a,b, c números reales $a \neq 0$, se la denomina función cuadrática.



a recibe el nombre de termino cuadrático.

b recibe el nombre de termino lineal.

c recibe el nombre de termino independiente

La representación gráfica de una cuadrática es una parábola.

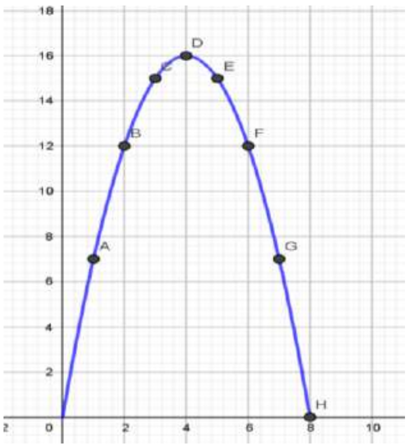
Ejemplo:
Disponemos de un alambre de 16 cm de largo con el cual podemos construir distintos rectángulos. Deseamos construir una función que relacione la base de cada rectángulo posible con el área de dicho rectángulo.
Viendo la imagen podemos escribir el área del rectángulo como: $A = x \cdot y$
Pero en esta función tenemos dos variables independientes. Para simplificarla tenemos que tener en cuenta que el perímetro de cualquiera de los rectángulos posibles siempre es 16 cm. Planteemos esta condición:

$P = 2x + 2y = 16$
$y = 8 - x$
Sustituyendo obtenemos la función del área con respecto a la longitud de la base:

$A(x) = x \cdot (8 - x)$

Ahora que disponemos de la ecuación de la función construyamos su gráfica a partir de una tabla de valores.

x	A
1	7
2	12
3	15
4	16
5	15
6	12
7	7
8	0



Podemos observar que la gráfica resultante es una curva especial a la que denominamos parábola.
Podemos realizar la gráfica de una parábola a partir de hacer una tabla de valores o como veremos a continuación identificando los elementos notables de esta curva.

Elementos de la parábola

La curva de una función cuadrática posee los siguientes elementos característicos:

a. Ordenada al origen: Se denomina así al punto donde la curva interseca con el eje de las ordenadas (vertical). Se calcula reemplazando la variable independiente por 0. $f(0)$

b. Raíces: Denominamos de esta manera a los puntos de intersección entre la curva y el eje de las abscisas. Se calcula resolviendo la ecuación $f(x) = 0$

c. Vértice: Este punto es donde la parábola cambia su crecimiento. Es decir donde pasa de ser creciente a decreciente o viceversa. Además dependiendo de este cambio podemos decir que el vértice es el máximo o mínimo de la función. Para calcularla se debe tener en cuenta que la abscisa se calcula como el punto medio de las raíces y la ordenada como la imagen de esa abscisa.

d. Eje de simetría: Es una recta vertical que pasa por el vértice. Se denomina de esa manera porque cada punto de un lado de este eje tendrá su simétrico al otro lado, a la misma distancia.

Formas de la función cuadrática

Toda función cuadrática puede ser expresada en cualquiera de las tres formas siguientes:

$\mathrm{f(x)} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c} \rightarrow$ Forma polinómica

$\mathrm{f(x)} = \mathrm{a}(\mathrm{x} - \mathrm{x_v})^2 + \mathrm{y_v} \rightarrow$ Forma canónica

$\mathrm{f(x)} = \mathrm{a}(\mathrm{x} - \mathrm{x_1})(\mathrm{x} - \mathrm{x_2}) \rightarrow$ Forma factorizada

A continuación veremos cómo graficar la función cuadrática identificando los elementos de la parábola en las distintas formas.

Forma Polinómica: $f(x) = x^2 + 2x - 3$

a. Ordenada al origen: Según su definición $f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 - 3 = -3$

b. Raíces: Se calcula resolviendo la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$

Para resolverla podemos utilizar en este caso la ecuación resolvente

$$x_1; x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 4}{2}$$

$x_1 = 1$; $x_2 = -3$

c. Vértice: Según su definición

$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$

$y_v = f(x_v) = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4$

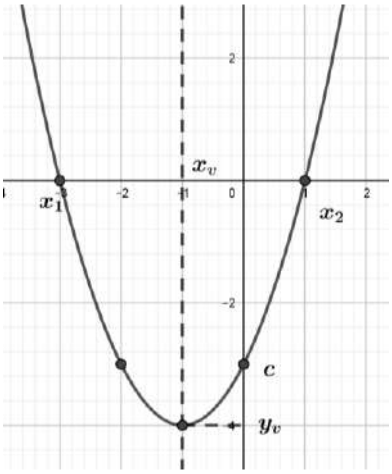
d. Eje de simetría: Es la recta vertical cuya ecuación es:

$x = x_v$

$x = -1$

Veamos la gráfica:

En el grafico podemos observar marcados la ordenada al origen, las raíces, el vértice y



el eje de simetría. Además de los cuatro puntos nombrados podemos ver que se marcó un quinto punto por simetría de la ordenada al origen.

Forma canónica: $f(x) = -2(x-1)^2 + 8$

a. **Ordenada al origen**: Según su definición $f(0) = -2(0-1)^2 + 8 = 6$

b. **Raíces:** Se calcula resolviendo la ecuación $-2(x-1)^2 + 8 = 0$

Para resolverla podemos despejar la ecuación

$(x-1)^2 = 4$

$x - 1 = \pm 2$

$x = \pm 2 + 1$

$x_1 = 3 \;\; ; \;\; x_2 = -1$

c. **Vértice:** En este caso por definición de la ecuación canónica podemos observar que el vértice tiene las siguientes coordenadas: V $= (1; 8)$

Podemos comprobarlo aplicando como en el caso anterior

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

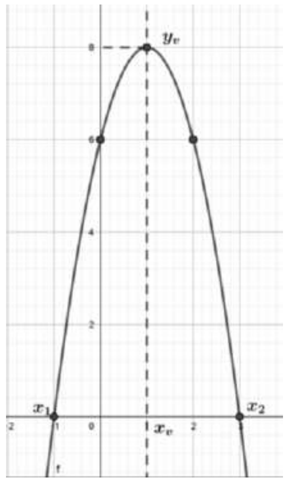
$y_v = f(x_v) = f(1) = -2(1-1)^2 + 8 = 8$

d. **Eje de simetría:** Es la recta vertical cuya ecuación es:

$x = x_v$

$x = 1$

Veamos la gráfica:



Forma factorizada: $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+4)}$

a. Ordenada al origen:

Según su definición $f(0) = \frac{1}{2}(0-2)(0+4) = -4$

b. Raíces: Se calcula resolviendo la ecuación $\frac{1}{2}(x-2)(x+4) = 0$

Para resolverla podemos utilizar propiedad del producto nulo:

$(x-2)(x+4) = 0$

$x-2 = 0$ ó $x+4 = 0$

$x_1 = 2$; $x_2 = -4$

c. Vértice: Para calcularlo utilizamos la definición vista

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2-4}{2} = -1$$

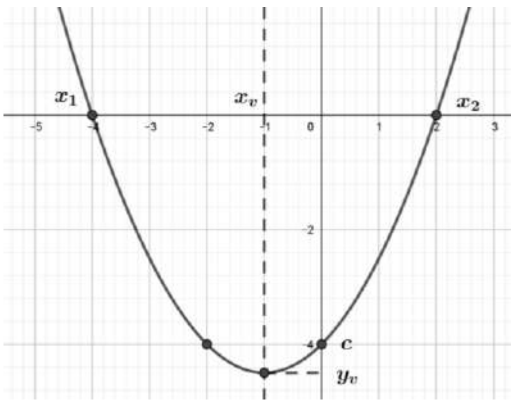
$$y_v = f(x_v) = f(-1) = \frac{1}{2}(-1-2)(-1+4) = -\frac{9}{2}$$

d. Eje de simetría: Es la recta vertical cuya ecuación es:

$x = x_v$

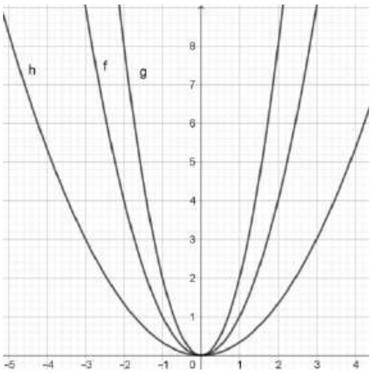
$x = -1$

Veamos la gráfica:

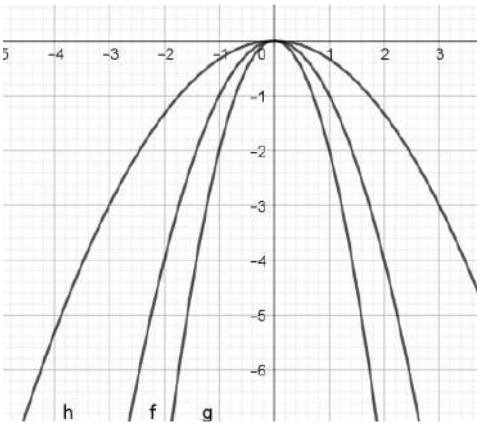


Parámetro cuadrático

Hemos visto que todas las formas de la ecuación de una función cuadrática poseen en común un solo parámetro, el cuadrático, "a".
Veamos qué cambios provoca los distintos valores que puede tomar este parámetro. Para ello primero graficaremos parábolas cuyos parámetros son positivos.
Grafiquemos las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x^2$ y $h(x) = \frac{1}{3}x^2$



Podemos observar que todas estas funciones cuadráticas poseen en común lo que denominaremos concavidad. En este caso diremos que son parábolas cóncavas hacia arriba porque las ramas de la parábola abren en esa dirección. Además podemos observar que para valores mayores a 1 la parábola se acerca al eje de las ordenadas y para valores menores a 1 se acerca al eje de las abscisas.



Veamos que sucede si graficamos funciones cuadráticas con valores de a negativos. Para simplificar la idea tomaremos las mismas funciones pero con los valores de a opuestos.

Como se puede observar para valores negativos las parábolas son cóncavas hacia abajo.

La concavidad de las parábolas permite saber si el vértice es un máximo o un mínimo de la función.

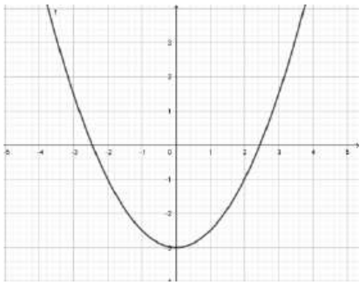
a. Para $a > 0$ la parábola es cóncava hacia arriba por lo que el vértice es un mínimo.

b. Para $a < 0$ la parábola es cóncava hacia abajo por lo que el vértice es un máximo.

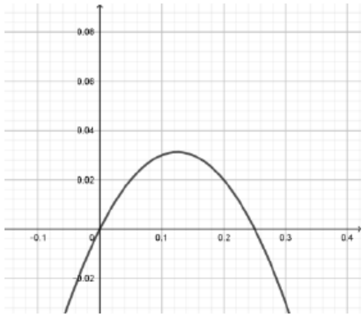
Ejercicios 12:

Marquen con una X la fórmula de la función que corresponde a cada gráfico.

$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3$	
$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3$	
$y = \frac{1}{2}x^2 + 3$	
$y = \frac{1}{2}x^2 - 3$	



$y = 2x^2 + \frac{1}{2}x$	
$y = 2x^2 - \frac{1}{2}x$	
$y = -2x^2 + \frac{1}{2}x$	
$y = -2x^2 - \frac{1}{2}x$	



Ejercicio 13:

Completen las siguientes oraciones correspondientes a las gráfica de $y = -3x^2 + x + 2$

Los coeficientes de los términos de la función son: a =.......... b =.......... c = ...

El vértice de la parábola es el punto...........

El eje de simetría de la parábola es la recta..............

La ordenada al origen de la función es el punto.................

Las raíces de la función son x_1 =........ x_2 = ...

2.11. Inecuaciones

Los enunciados matemáticos en los que figuran los símbolos $<$, $>$, $\leq$, $\geq$se llaman desigualdades. Una solución de una desigualdad es cualquier número que la hace cierta. El conjunto de todas las soluciones es llamado conjunto solución. Cuando hemos encontrado todas las soluciones de una desigualdad, decimos que la hemos resuelto.

A partir de la definición anterior podemos decir que las inecuaciones son desigualdades matemáticas entre dos miembros, en los cuales aparecen valores desconocidos a los que llamamos incógnitas.

Para verificar que un valor determinado es solución de la una inecuación solo hace falta sustituir dicha incógnita por el valor y observar si la desigualdad se cumple.

Ejemplos:

Determinar si los valores -2, 5 y 0 son soluciones posibles de la inecuación $x + 3 < 6$
Sustituyendo $x = -2$ podemos observar

$-2 + 3 < 6 \rightarrow 1 < 6 \rightarrow$ La desigualdad se cumple por lo que -2 es solución de la inecuación

Sustituyendo $x = 5$ podemos observar

$5 + 3 < 6 \to 8 < 6 \to$ La desigualdad no se cumple por lo que 5 no es solución de la inecuación

Sustituyendo $x = 0$ podemos observar

$0 + 3 < 6 \to 3 < 6 \to$ La desigualdad se cumple por lo que 0 es solución de la inecuación

Como se puede ver la inecuación tiene como solución a más de un valor, hemos encontrado dos, pero es posible encontrar muchos más.

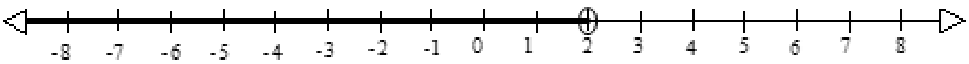
Conjunto solución

Denominamos así a todos los posibles valores que verifican la desigualdad.
En la inecuación anterior hemos encontrado dos valores que pertenecen al conjunto solución pero no hemos determinado todos los valores posibles.

Ejemplo:

Determine el conjunto solución de la inecuación $x < 2$

Determinar el conjunto solución de esta inecuación es mucho más intuitivo. Podemos afirmar que todos los valores menores a 2 serán solución de esta inecuación. Lo escribiremos $S = \{x: x < 2\} = (-\infty; 2)$
El conjunto solución de esta inecuación es infinito porque existen infinitos valores menores a 2. Este conjunto se puede marcar en la recta numérica como mostraremos a continuación.



En los ejemplos anteriores pudimos observar que para una inecuación sencilla como $x < 2$ es sencillo expresar su conjunto solución pero para una inecuación como $x + 3 < 6$ no lo es.

Para trabajar con inecuaciones donde su conjunto solución no sea evidente convendrá aplicar propiedades para transformar la inecuación en una equivalente más sencilla. Veamos dichas propiedades.

Propiedad aditiva de la desigualdad
Para las desigualdades hay una propiedad de la adición similar a la de la igualdad.

Si un número se suma o resta a ambos miembros de una desigualdad que es cierta, se obtiene otra desigualdad que también lo es.

En símbolo:

Si a $< b$ es cierta, entonces a $+$ c $< b + c$ es cierta para cualquier número real c.
Lo mismo se puede decir de los símbolos$>$,$\leq$ y $\geq$

Propiedad multiplicativa de la desigualdad
Considera la desigualdad $4 < 9$

Si multiplicamos ambos números por 2 obtenemos la desigualdad $8 < 18$ también cierta.

Si multiplicamos ambos números por -3 obtenemos una desigualdad que es falsa $-12 < -27$
No obstante, si invertimos el símbolo de desigualdad, obtenemos la desigualdad $-12 > -27$ que es cierta.

Si multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un número positivo, obtenemos una desigualdad cierta. Si multiplicamos ambos miembros de una desigualdad por un número negativo, e invertimos el símbolo de desigualdad, obtenemos otra desigualdad cierta.

En Símbolo: Si a $< b$ es cierta, entonces

a. ac $< bc$ es cierta para cualquier número real positivo c, y

b. ac $> bc$ es cierta para cualquier número real negativo c

Lo mismo se puede decir de los símbolos$<, \leq$ y $\geq$

Al resolver desigualdades, utilizamos las propiedades aditiva y multiplicativa de la misma forma a como lo hacemos cuando resolvemos ecuaciones.

Ejemplo: Resuelve.

$16 - 7y \geq 10y - 4$

$-16 + 16 - 7y \geq -16 + 10y - 4$

Sumando -16

$7y \geq 10y - 20$

$10y - 7y \geq -10y + 10y - 20$

Sumando -10y

$-17y \geq -20$

$-\frac{1}{17}(17y) \leq -\frac{1}{17}(-20)$

Multiplicando por -1/17

$y \leq \frac{20}{17}$

Conclusión: El conjunto solución es $\left\{y: y \leq \frac{20}{17}\right\}$

Ejercicio: Resuelve las siguientes desigualdades

a. $6 - 5y \geq 7$

b. $3x + 5x < 4$

c. $17 - 5y \leq 8y - 5$

Resolvemos problemas: Empleo de desigualdades

Ejemplo: En un curso de historia habrá tres exámenes. Para obtener un 10 necesitas un total de 270 puntos. En los dos primeros exámenes has obtenido, respectivamente, 91 y 86 puntos. ¿Qué puntuación necesitas en la última prueba para obtener un 10?

Datos: Las dos primeras calificaciones fueron 91 y 86.

Sea x la calificación que vas a obtener en el último examen.

Puntuación total ≥ 270

$91 + 86 + x \geq 270$

$177 + x \geq 270$

Verificamos: Si la tercera calificación es 93

$91 + 86 + 93 = 270$

Si la tercera calificación es mayor que 93, digamos 95, entonces

$91 + 86 + 95 = 272$

Respuesta: La puntuación en el tercer examen debe ser al menos 93 para obtener un 10.

Ejemplo: En tu nuevo empleo te ofrecen dos planes de pago distintos.

Plan A: Un salario mensual de $600 más una comisión del 4% sobre el total de ventas.

Plan B: Un salario mensual de $800 más una comisión del 6% sobre el total de ventas una vez rebasados los $10 000.

¿Para qué cantidad del total de ventas es mejor el plan A que el plan B suponiendo que el total de ventas es siempre superior a los 10000 dólares?
Datos:

Plan A: $600 al mes más 4% de comisión.

Plan B: $800 al mes más 6% de comisión sobre las ventas que superen los $10000.

Utilizamos x para representar las ventas del mes.

Ingreso en el plan A = 600 + 4% x.

Ingreso en el plan B = 800 + (x - 10000) 6%.

Ingreso del plan A > Ingreso del plan B

$600 + 0{,}04x > 80 + (x - 10000)0{,}06$

$600 + 0{,}04x > 200 + 0{,}06x$

$400 > 0{,}02x$

$20000 > x$

Respuesta: Cuando el total de ventas es inferior a $20 000, el plan A es mejor que el plan B.

Practica 2

Ejercicio 1: Resuelve las siguientes ecuaciones

a. $y - \frac{y}{2} + \frac{y}{3} - \frac{y}{4} = \frac{y}{5}$

b. $\frac{7+2(x+1)}{3} = \frac{8x}{5}$

c. $\frac{2y-7}{3} + \frac{(8y-9)}{14} = \frac{3y-5}{21}$

d. $2(p-1) - 3(p-4) = 4p$

Ejercicio 2: Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas

a. $7x^2 - 3 = 0$

b. $14x^2 - 9x = 0$

c. $19x^2 - 8x = 0$

d. $x^2 + 8x + 15 = 0$

e. $x^2 + 9x + 14 = 0$

f. $6x^2 - x - 2 = 0$

g. $2x^2 + 13x + 15 = 0$

h. $9t^2 + 15t + 4 = 0$

i. $3y^2 + 10y - 8 = 0$

j. $6x^2 + 4x = 10$

Ejercicio 3: Con una pieza rectangular de cartón de 10 cm por 20 cm se hará una caja abierta cortando un cuadrado de cada una de sus esquinas. El área del fondo de la caja deberá ser de 96 cm^2. ¿Cuál es la longitud de los lados de los cuadrados que serán cortados en las esquinas?

Ejercicio 4: El marco de un cuadro mide 14 cm. por 20 cm. En su interior, el cuadro ocupa 160 cm^2. Calcula el ancho del marco.

Ejercicio 5: La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 m. Uno de los careros es 14 m más largo que el otro. Calcula las longitudes de los catetos.

Ejercicio 6: La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 25 km. La longitud de uno de los catetos es 17 km menor que la del otro cateto. Calcula las longitudes de los catetos.

Ejercicio 7: Determina la naturaleza de las raíces de cada ecuación

a. $x^2 - 6x + 9 = 0$

b. $x^2 + 10x + 25 = 0$

c. $x^2 + 7 = 0$

d. $x^2 + 2 = 0$

e. $x^2 - 2 = 0$

f. $x^2 - 5 = 0$

g. $4x^2 - 12x + 9 = 0$

h. $4x^2 + 8x - 5 = 0$

Ejercicio 8: Representa gráficamente

a. $x \leq 4$

b. $y < -1$

c. $x > 5$

d. $x \geq 34$

Ejercicio 9: Resuelve las siguientes inecuaciones

a. $x + 8 > 3$

b. $y + 4 < 10$

c. $a + 7 \geq 5 - 13$

d. $x - 9 \leq 10$

e. $x - 11 \leq -2$

f. $8x \geq 24$

g. $9\,t\ <\ -81$

h. $0{,}3x\ <\ -18$

i. $-9x \geq -8{,}1$

j. $2x\ +\ 7\ <\ 19$

k. $-\frac{3}{4}x \geq -\frac{5}{8}$

l. $2y\ -\ 7\ <\ 5y\ -\ 9$

m. $8x\ -\ 9\ <\ 3x\ -\ 11$

n. $0{,}4x + 5 \leq 1{,}2x - 4$

Ejercicio 10: Resuelve los siguientes problemas

a. A un pintor se le puede pagar de dos maneras.

Plan A: $500 más $15 por hora.

Plan B: $20 por hora.

Supón que la realización de un trabajo tarda n horas. ¿Para qué valores de n es mejor el plan A para el pintor?

b. Un automóvil se renta por $13.95 diarios más $0,10 por milla. Tu presupuesto diario para la renta de automóviles es de $76.00. ¿Para qué millaje te puedes mantener dentro del presupuesto?

c. Estás tomando un curso de historia. Habrá cuatro exámenes. Tus calificaciones en los tres primeros exámenes son 89, 92, Y 95. Para obtener una A necesitas un total de 360 puntos. ¿Qué puntuación necesitas en el último examen para obtener una A?

d. Vas a invertir $25 000, una parte al 14% y otra al 16%. ¿Cuál es la máxima cantidad que puedes invertir al 14% para hacer que el pago de intereses al cabo de un año sea al menos de $3600?

Ejercicio 11: Resuelve y grafica las siguientes inecuaciones

$-2\ <\ x\ +\ 2\ <\ 8$

$-1 < x + 1 \leq 6$

$1 < 2y + 5 \leq 9$

$3 \leq 5x + 3 \leq 8$

$-10 \leq 3x - 5 \leq 1$

Ejercicio 12: Resuelve los siguientes problemas

a. La suma de dos números es -42. El primero de ellos menos el segundo es 52 Calcula estos números.

b. La soja tiene un 16 % de proteínas y el maíz un 9 %. ¿Cuántos kilogramos de cada uno de estos ingredientes se debería mezclar para obtener una mezcla de 350 kilogramos de proteínas?

c. Una bebida refrescante tiene 15 % de jugo de naranja y otra 5 % de esta sustancia. ¿Cuántos litros de cada una de ellas debería mezclar para obtener 10 l de bebida refrescante de jugo de naranja?

d. Se hicieron dos inversiones por un total de $8800. En cierto año estas inversiones produjeron $1326 de interés simple. Una parte de dinero se invirtió al 14 % y otra al 16 %, Encontrar la cantidad invertida a cada tipo de interés.

e. Un tren sale de una estación y viaja hacia el norte a 75 Km/h. Dos horas más tarde un segundo tren deja la estación sobre un vía paralela y viaja hacia el norte a 125 Km/h. ¿A qué distancia de la estación dará alcance el segundo tren al primero?

f. Dos automóviles salen de una ciudad viajando en dirección contraria. Uno viaja a 80 Km/h y el otro a 96 km/h. ¿En cuánto tiempo se encontraran a 528 kilómetros de distancias entre sí?

g. Carlos es 8 años mayos que su hermano Roberto, hace 4 años la edad de María era dos tercios la de Carlos. ¿Qué edad tiene cada uno de ellos?

h. El perímetro de un campo rectangular es 628 m. El largo del campo excede a su ancho en 6 m. Calcula las dimensiones.

i. Iván y Luís son profesores de matemática. En total llevan 46 años dando clases. Hace 2 años, Iván llevaba 2,5 veces las años que tenía Luís como profesor. ¿Cuantos años llevan en la enseñanza cada uno?

j. Nancy corre y camina a la escuela cada día, tiene un promedio de 4 Km/h caminando y 8 Km/h corriendo. La distancia de su hogar a la escuela es de 6 Km y realiza el viaje en una hora. ¿Qué distancia hace corriendo?

Ejercicio 13: Hallar y graficar

a. La ecuación de la recta paralela a $y = \frac{1}{3}x + 1$ que pase por el punto (-3; 2)

b. La ecuación de la recta perpendicular a $y = 2x - 3$ que pase por el punto (-2; 1)

Ejercicio 14: Hallar la ecuación explicita de cada una de las siguientes rectas.

a. $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$

b. $\frac{x}{\frac{1}{3}} + \frac{y}{-2} = 1$

c. $\frac{x}{-\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{1}{4}} = 1$

Ejercicio 15: Hallar la ecuación de la recta que cumple cada una de las siguientes condiciones:

a. Pasa por el punto (1; 5) y es paralela a la recta que pasa por los puntos (-2; 3) y (0; -1)

b. Corta al eje en $x_0 = 2$ y es paralela a la recta $\frac{x}{-1} + \frac{y}{2} = 1$

c. Pasa por el punto (-2; -1) y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos (-1;4) y (3;1)

d. Corta al eje en $y_0 = 3$ y es perpendicular a la recta $\frac{x}{\frac{2}{3}} + \frac{y}{-1} = 1$

Ejercicio 16: Para las siguientes funciones cuadráticas hallar el vértice, raíces, eje de simetría y ordenada al origen

a. $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b. $g(t) = -3t^2$

c. $h(x) = 2(x+1)^2$

Ejercicio 17: Completar el siguiente cuadro y representar gráficamente las funciones dadas.

FUNCIÓN	a	b	c	Raíces	Vértice	Eje de simetría	Ordenada al origen
$y = -x^2 + 2$							
$y = 2x^2 + 4x - 1$							
$y = x^2 - 4x - 5$							

3. POLINÓMICAS

Para comenzar este capítulo primero deberemos definir que es un polinomio, dar sus características fundamentales y realizar operaciones.

3.1. Polinomios en una variable

En general, un polinomio de grado n, en la variable x se simboliza:

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_n \neq 0$

Veamos que representa cada símbolo:
Los coeficientes son números reales, o sea $a_i \in R$, con $i = 0, 1, 2, \dots, n$; (n ∈**N**)
La x representa un número real.
Los exponentes son números enteros no negativos de cero a n.

Monomios

Es toda expresión algebraica entera en la que no intervienen las operaciones de suma ni resta. Es decir, un monomio es un polinomio de un solo término.

Ejemplos:

a. $8\mathrm{ab}^3$

b. $-\frac{2}{3}\mathrm{xab}^3$

c. $-5\mathrm{x}^4$

Monomios semejantes o términos semejantes

Dos monomios son ***semejantes*** cuando tienen idéntica parte literal; es decir tienen las mismas letras o variables con los mismos exponentes, difieren en los coeficientes

Ejemplos:

a. $\frac{2}{3}\mathrm{x}$

b. $4\mathrm{x}$

c. $-5\mathrm{x}$

Los tres monomios difieren únicamente en el coeficiente, por lo tanto son monomios semejantes.

Grado de un polinomio

El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo componen. Se simboliza $gr[P(x)]$.

Ejemplo: $\mathrm{P(x)} = 4\mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x} - 3$

¿Cuántos factores literales hay en cada uno de los términos?

En efecto en el primer término hay tres factores literales $(x^3 = x\,x\,x)$, en el segundo hay uno (x) y en el tercero no hay factores literales.

Por tal razón se dice que tales términos o monomios son de grado tres, uno y cero, respectivamente y según la definición de grado de un polinomio, el grado de P(x) es el el del monomio de mayor grado, o sea $gr[P(x)] = 3$

Coeficiente Principal

El coeficiente del término de mayor grado de un polinomio se denomina coeficiente principal del polinomio. Si es uno, el polinomio se dice reducido, normal o mónico.

Ejemplo:

El coeficiente principal del polinomio $Q(t) = 4t + 8t^3 - 1 + t^{10}$ es uno y por lo tanto el polinomio es reducido.

Polinomio ordenado

Decimos que un Polinomio está ordenado cuando todos sus términos están dispuestos de modo que los exponentes de la variable vayan aumentando o disminuyendo sucesivamente desde el primer término hasta el último. La ordenación será creciente o decreciente según que los exponentes de la letra vayan de menor a mayor o viceversa.

Ejemplos:

a. $\mathrm{C(x)} = 5\mathrm{x}^3 - \mathrm{x}^2 + 3$

b. $\mathrm{P(y)} = 10\mathrm{y} + 2\mathrm{y}^3 + \mathrm{y}^5 - 4^2\mathrm{y}^8$

c. $\mathrm{M(t)} = \mathrm{t}^2 - 2\mathrm{t} + 7$

Polinomio completo

Un polinomio se dice que está completo cuando contiene términos desde el de mayor grado hasta el grado cero.

Ejemplo:

a. $N(x) = 7x^3 - 2x^2 + 5x + 4$

b. $Q(y) = 8y^4 - 2y^3 + y^2 - y + 8$

Cabe destacar que si un polinomio es incompleto, es posible completarlo escribiendo las potencias de la variable que faltan con coeficiente cero.

Ejemplo:

a. $P(x) = 2x^4 - 5x^2 - 6$

b. $P(x) = 2x^4 + 0x^3 - 5x^2 + 0x - 6$

Ejercicio 1: Complete el siguiente cuadro, consignando si, no, o el número que corresponda en las respectivas columnas.

POLINOMIO	Grado	Coeficiente Principal	Reducido o Monico	Completo	Termino Independiente
$P = 3x^2 - 4x - 1$					
$Q = -t^3 + 4$					
$S = r^2 \cdot (1 + 3r^3)$					
$T = -3 + m^8 + \frac{2}{3}m^2$					

Valor numérico de un polinomio

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ para $x = a$, es el número que se obtiene al resolver las operaciones después de haber reemplazado en el polinomio a la variable x por a. Se simboliza: $P(a)$

Ejemplo:

Hallar el valor del polinomio $T(s)$ en $s = -1$; siendo $T(s) = -5s^3 + s^2 - 3$
Hacemos el reemplazo y operamos, resulta:

$T\ (-1) = -5(-1)^3 + (-1)^2 - 3$

$T(-1)\ =\ 3$

Se dice que 3 es el valor numérico del polinomio T(s) para s = -1

Ejercicio 2:

¿Cuál es el valor numérico de $T(s)$ para $s\ =\ 2$, para $s\ =\ 0$ y para $s\ =\ -2$?

Respuesta:

$T(2) = -39$; $T(0) = -3$ y $T(-2) = 41$

Debemos agregar que:

Si $P(a)$ es igual a cero, se dice que a es una raíz o cero del polinomio $P(x)$.

Ejemplo:

¿Cuáles de los números que siguen -3; 0;$\frac{1}{2}$; y 1 son raíces del polinomio?

$P(x) = 2x^3 + 7x^2 2x - 3$

Reemplazando en lugar de x por los valores dados se obtiene que:

$P(-3) = 2(-3)^3 + 7(-3)^2 + 2(-3) - 3 = 0$

$P(0) = 2(0)^3 + 7(0)^2 + 2(0) - 3 = -3$

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 7\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right) - 3 = 0$

$P(1) = 2(1)^3 + 7(1)^2 + 2(1) - 3 = 8$

Los números -3 y $\frac{1}{2}$ son raíces del polinomio $P(x)$

3.2. Operaciones con polinomios

Hemos llamado polinomio en una indeterminada a una expresión de la forma:

$\mathrm{P(x)} = \mathrm{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0} \quad \text{con } \mathrm{a_n} \neq 0$

Si los coeficientes a_0,a_1,a_2,..., a_n son números reales, decimos que es un polinomio real formal en x, siendo x la indeterminada o variable.

Definimos algunas operaciones siguiendo reglas similares a las de las operaciones en los Reales.

Adición: Se suman los coeficientes de los términos semejantes y se obtiene un polinomio de grado igual al del término de mayor grado entre los polinomios sumandos.

Ejemplo:

Sean P y Q dos polinomios: $P = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}x^2$ y $Q = -5 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^3$

$$P + Q = (2 - 5) + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3 = -3 + 2x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{4}x^3$$

Sustracción: Se suma al polinomio minuendo el opuesto del polinomio sustraendo

Ejemplo:

Sean P y T dos polinomios: $P = 10 + 5x^2 - 9x^3$ y $T = 6 + 8x - x^4$

$$P - T = (10 + 5x^2 - 9x^3) + (-6 - 8x + x^4) = 4 + 8x + 5x^2 - 9x^3 + x^4$$

Producto de un polinomio por un monomio: Se procede a multiplicar cada término del polinomio por el monomio.

Ejemplo:

Sea $Q(x) = 2x^3 - 4x + 1$ un polinomio y $C(x) = 3x^2$ un monomio, entonces

$$Q(x) \cdot C(x) = 2x^3 \cdot 3x^2 - 4x \cdot 3x^2 + 1 \cdot 3x^2 = 6x^5 - 12x^3 + 3x^2$$

Producto de dos polinomios: Se aplica la propiedad distributiva del producto respecto de la suma o resta y se respetan las propiedades de producto de potencias de igual base.

Al multiplicar un polinomio de grado p por otro de grado q, se obtiene un polinomio de grado $p + q$.

Ejemplo:

Sea $Q(x) = 2x^5 - x^3 + 3x^2$ y $R(x) = -x^2 + x - 4$ dos polinomios; entonces

$$\begin{aligned} Q(x) \cdot R(x) &= (2x^5 - x^3 + 3x^2) \cdot (-x^2 + x - 4) \\ &= -2x^7 + x^5 - 3x^4 + 2x^6 - x^4 + 3x^3 - 8x^5 + 4x^3 - 12x^2 \\ &= -2x^7 + 2x^6 - 7x^5 - 4x^4 + 7x^3 - 12x^2 \end{aligned}$$

Se aplicó la definición de producto de dos polinomios.
Se agrupó los términos semejantes y se ordenó el polinomio.

Productos Especiales

a. Cuadrado de un binomio

Sea por ejemplo:

$$(x + a)^2 = (x + a)(x + a)$$

$$(x + a)^2 = x^2 + xa + ax + a^2$$

Regla: *El cuadrado de un binomio es igual a la suma de los cuadrados de cada término más el doble producto del primero, por el segundo.*

Ejemplos:

$$(3 + x)^2 = 9 + 2 \cdot 3 \cdot x + x^2 = 9 + 6 \cdot x + x^2$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=x^2-x+\frac{1}{4}$$

b. Cubo de un binomio

Sea $(x + a)^3$ Se resuelve aplicando las propiedades de la potenciación de números reales.

$(x+a)^3$	$=$	$(x+a)^2(x+a)$	Se aplica producto de potencias de igual base.
$(x+a)^3$	$=$	$(x^2+2xa+a^2)(x+a)$	Se aplica cuadrado de un binomio y propiedad distributiva
$(x+a)^3$	$=$	$x^3+x^2a+2x^2a+2xa^2+a^2x+a^3$	se obtiene
$(x+a)^3$	$=$	$x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$	Se suman términos semejantes y se ordena el polinomio

Regla: *El cubo de un binomio es igual a la suma de los cubos de cada término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo.*

Ejemplos:

$$\begin{aligned}(2\mathrm{x}+5)^3 &= (2\mathrm{x})^3+3\cdot(2\mathrm{x})^2\cdot 5+3(2\mathrm{x})\cdot 5^2+5^3\\ &= 8x^3+3\cdot 4\cdot x^2\cdot 5+3\cdot 2x\cdot 25+125\\ &= 8x^2+60x^2+150x+125\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(-2x^3-\frac{3}{2}\right)^3 &= (-2x^3)^3+3\cdot(-2x^3)^2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+3\cdot(-2x^3)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}\right)^3\\ &= -8x^9+12x^6\left(-\frac{3}{2}\right)+3\cdot(-2x^3)\cdot\frac{9}{4}-\frac{27}{8}\\ &= -8x^9-18x^6-\frac{27}{2}x^3-\frac{27}{8}\end{aligned}$$

c. Producto de la suma por la diferencia de dos términos

$(x+a)(x-a)$ Se aplica propiedad distributiva

$(x+a)(x-a)=x^2-xa+ax-a^2=x^2-a^2$ Se agrupan los términos semejantes

$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

Regla: *El producto de la suma de dos términos por la diferencia de los mismos es igual a la diferencia de los cuadrados de dichos términos.*

Ejemplos:

$$\left(-\frac{1}{2}x^2+3x\right)\left(-\frac{1}{2}x^2+3x\right)=\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^2-(3x)^2=\frac{1}{4}x^4-9x^2$$

$$\left(\frac{1}{5}x^3+\frac{4}{3}x^2\right)\left(\frac{1}{5}x^3+\frac{4}{3}x^2\right)=\left(\frac{1}{5}x^3\right)^2-\left(\frac{4}{3}x^2\right)^2=\frac{1}{25}x^6-\frac{16}{9}x^4$$

Ejercicio 3: Marque con una cruz todas las afirmaciones verdaderas, luego indique la respuesta correcta en el caso de que resultasen falsas.

Sea dos polinomios $P=x^2-4x+4$ $\quad Q = 2x - 4$; entonces:

Afirmación	Verdadera	Respuesta correcta
$P + Q = x^2 - 2x$		
$P - 2Q = x^2 - 8x + 12$		
$3P \cdot Q = 6(x-2)^3$		
$P : Q = x - 2$		
$Q^2 = 4(x-2)^2$		
$P(-3) \neq -25$		
La raíz de Q es 2		
Las raíces de $\boldsymbol{P}$ son $x_1 = 2$ y $x_2 = 2$		

Ejercicio 4: Marque con una cruz los enunciados verdaderos. En la segunda columna justifique cada respuesta verdadera simbolizando el enunciado, y cada respuesta falsa proporcionando un ejemplo. A modo de guía le presentamos la respuesta del primer ítem.

Enunciado	Verdadero	Justificación
El polinomio nulo es neutro en la adición de polinomios	**x**	Cualquiera sea P: $P + 0 = 0 + P = P$
El polinomio nulo carece de grado.		
El grado de la suma de dos polinomios $P(t)$ y $Q(t)$ es igual a la suma de los grados de los polinomios sumados.		
En el polinomio que es neutro en la multiplicación de polinomios, carece de grado.		

Ejercicio 5: Resuelva las siguientes operaciones

$(3x^2 + 2x)^2 =$

$\left(-\frac{1}{4}x^3 - 2\right)^2 =$

$\left(\frac{2}{5}x^3 - 5x^2\right)^2 =$

$\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{4}x\right)^3 =$

$\left(\frac{3}{4} + x^2\right)\left(\frac{3}{4} + x^2\right) =$

$\left(-2 - \frac{1}{3}x\right)\left(-2 - \frac{1}{3}x\right) =$

d. División de Polinomios

La división de polinomios se realiza de acuerdo con las reglas de propiedades de la división de números Reales aunque la indeterminada x no sea un número Real.

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios tales que $gr[P(x) = m], gr[Q(x) = n]$ y $m \geq n$. Entonces existen dos polinomios únicos $C(x)$ y $R(x)$ tales que verifican la siguiente expresión: $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$
Siendo:

$P(x)$ el dividendo

$Q(x)$ el divisor

$C(x)$ el cociente

$R(x)$ el resto.

Cuando $R(x) = 0$

$P(x) = Q(x) \cdot C(x)$

Se dice entonces que $P(x)$ es divisible por $Q(x)$, o que $Q(x)$ es divisor exacto de $P(x)$.

En el caso de que $R(x) \neq 0$, el $gr[R(x)] < gr[Q(x)]$

Para facilitar lo dicho anteriormente podemos comparar la división de polinomios con la división de números enteros estudiadas en el primer capítulo. Observemos sus similitudes:

División Entera	División de Polinomios
$a = b \cdot c + r$	$A = B \cdot C + R$
$r < b$ o $r = 0$	$gr[R] < gr[B]$ o R es nulo

Ejemplo:

Sean $P(x) = 8x^3 + 2x^2 - 2x + 5$ y $Q(x) = 2x^2 + x - 1$ entonces $P(x) : Q(x)$ es:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & 8x^3 + 2x^2 - 2x + 5 & 2x^2 + x - 1 \\ \cline{3-3}
 & -8x^3 - 4x^2 + 4x & 4x - 1 \\ \cline{1-2}
0 & -2x^2 + 2x + 5 & \\
 & 2x^2 + x - 1 & \\ \cline{2-2}
 & +3x + 4 &
\end{array}
$$

Al $4x$ se lo va multiplicando por cada término de $Q(x)$ y al resultado se lo anota debajo del término semejante de $P(x)$ pero con el signo cambiado. Luego se suma y se baja el otro término, al igual que en una división entera. A continuación se procede de la misma manera con el -1.

Con lo cual: $C(x) = 4x - 1$ y $R(x) = 3x + 4$ y se verifica que
$P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$ ya que:

$8x^3 + 2x^2 - 2x + 5 = (2x^2 + x - 1) \cdot (4x - 1) + (3x + 4)$

$8x^3 + 2x^2 - 2x + 5 = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 2x^2 - x + 1 + 3x + 4$

$8x^3 + 2x^2 - 2x + 5 = 8x^3 + 2x^2 - 2x + 5$

Observación: Cuando $P(x)$ no es un polinomio completo ni ordenado es necesario completarlo y ordenarlo en forma decreciente para poder realizar los cálculos.

Ejemplo:

Sea $P(x) = x^4 - 2x + 3x^3$; ordenado y completo queda
$P(x) = x^4 + 3x^3 + 0x^2 - 2x + 0$ y luego realizamos la división.

e. División de un polinomio por otro de la forma $(x - a)$ Regla de Ruffini

Para resolver este tipo de cociente se utiliza la Regla de Ruffini.

Ejemplo:

Explicación del método.

Sean:$P(x) = 4x^3 + 5x^2 - x + 12$ y $Q(x) = x - 2$

Calcular $P(x)$: $Q(x)$

Se emplea la siguiente disposición práctica:
En la primera fila se escriben los coeficientes del polinomio dividendo completo y ordenado en forma decreciente

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 5 & -1 & 12 \\ & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

En la segunda fila, a la izquierda se escribe $\boldsymbol{a}$, en este caso 2.

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 5 & -1 & 12 \\ 2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$$

Observación: si el polinomio divisor hubiese sido $Q(x) = x + 2$, a hubiese sido -2, pues $x + 2 = x - (-2)$

En la tercera fila se escriben los coeficientes del cociente que se van obteniendo, mediante la siguiente regla:

El primer coeficiente del cociente es 4. Ahora, $4 \cdot 2 = 8$ este valor se escribe debajo del coeficiente 5, y se suma $5 + 8 = 13$.

El segundo coeficiente es 13. Luego, $13 \cdot 2 = 26$, se escribe debajo del coeficiente -1 y se suma $-1 + 26 = 25$.

El tercer coeficiente es 25. Por último, $25 \cdot 2 = 50$ se escribe debajo del coeficiente 12 y se suma $12 + 50 = 62$.

El resto es $R = 62$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 5 & -1 & 12 \\ 2 & & 8 & 26 & 50 \\ \hline & 4 & 13 & 25 & 62 \end{array} = R$$

El cociente es $C(x) = 4x^2 + 13x + 25$

Ejercicio 6: Halle los siguientes cocientes

$$\left(\frac{-3}{2}x^5 + 2x^4 - 0{,}1x^3\right) : \left(\frac{-2}{3}x^2\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}x^3 + 5\right) : (x + 2) =$$

3.3. Teorema del Resto

El resto de la división de un polinomio $P(x)$, por otro de la forma $(x + a)$ es igual a $P(-a)$.

Demostración

Si $P(x) : (x + a) = C$ y R es el resto

Entonces: $P(x) = (x + a) \cdot C + R$

Hacemos $x = -a$
$P(-a) = (-a + a) \cdot C + R$
$P(-a) = 0 \cdot C + R$
$P(-a) = R$

Ejemplos:

a. ¿Cuál es el resto de dividir $P(x) = x^3 - x^2 + x + 1$ por $Q(x) = x + 2$?
$P(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 + (-2) + 1 = -13$

Si $P(a) = 0$ entonces $P(x)$ es divisible por $(x - a)$
Porque: $P(x) = C(x) \cdot Q(x) + 0 = C(x) \cdot (x - a)$ siendo $C(x)$ el cociente.

b. Si $P(x) = x^3 + 4x + 16$ con $a = -2$
$P(-2) = (-2)^3 + 4(-2) + 16 = -8 - 8 + 16 = 0$

Divido $P(x)$ por $(x + 2)$ usando la Regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 4 & 16 \\
-2 & & -2 & 4 & -16 \\
\hline
 & 1 & -2 & 8 & 0
\end{array} \quad = \quad Resto$$

Entonces $P(x) = x^3 + 4x + 16 = (x + 2)(x^2 - 2x + 8)$

3.4. Raíces de un polinomio

Decimos que un número real a es raíz o cero del polinomio P(x) sí y solo sí se verifica que $P(a) = 0$

Ejemplos:

El número real $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ es raíz o cero de $P(x) = 2x^2 - 1$ porque:

$$P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{2}{4} - 1 = 0$$

Análogamente, el número real $b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ es también raíz de $P(x)$:

$$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{2}{4} - 1 = 0$$

El polinomio $Q(x) = x^2 + 2$ no admiten ceros o raíces reales porque al plantear $x^2 + 2 = 0$, vemos que no existen valores reales que satisfagan la igualdad.
Para encontrar los ceros o raíces de $S(t) = 2t^2 - t - 1$ debemos recordar cómo se resuelven las ecuaciones cuadráticas de la forma: $ax^2 + bx + c = 0$
Las raíces de esta expresión están dadas por la fórmula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En nuestro ejemplo:

$$t_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$$

De donde $t_1 = 1$ y $t_2 = -\frac{1}{2}$

Luego $t_1 = 1$ y $t_2 = -\frac{1}{2}$ son raíces de $S(t)$.

Ejercicio 7: Encontrar los ceros o raíces del siguiente polinomio:

$R(x) = x^3 - 6x + 4$

Solución

Si planteamos como en los ejemplos anteriores: $x^3 - 6x + 4 = 0$, nos encontramos con la dificultad de no poder despejar x, y no contar con una fórmula como en el caso cuadrático.
Para dar respuesta a este último problema usaremos el siguiente enunciado, que no demostraremos, y se llama Lema de Gauss.

3.5. Lema de Gauss

Definición: *Sea* $P(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ ... + a_1 \cdot x + a_0$ un polinomio con coeficiente enteros.

Si $P(x)$ admite al número entero a como raíz, entonces a es divisor de a_0.
Si $P(x)$ admite al número racional $a = \frac{p}{q}$ como raíz, entonces p es divisor de a_0 y q es divisor de a_n.

Así, para $R(x) = x^3 - 6x + 4$, donde $a_0 = 4$ y $a_3 = 1$, si $R(x)$ admite una raíz racional $a = \frac{p}{q}$ se deberá verificar que p es divisor de 4 y que q es divisor de 1.

Luego, los posibles valores son: $\begin{cases} p = \pm 1; \pm 2; \pm 4 \\ q = \pm 1 \end{cases}$

De donde, las posibles raíces racionales son: $\left\{a = \frac{p}{q} = \pm 1; \pm 2; \pm 4\right\}$

Las posibles raíces racionales (en este caso, como $a_3 = 1$, son posibles raíces enteras), si existen, son $\pm 1; \pm 2; \pm 4$.

Veamos que ocurre en cada caso:

$R(1) = 1 - 6 + 4 = -1 \neq 0$

$R(1) = 1 - 6 + 4 = 9 \neq 0$

$R(2) = 8 - 12 + 4 = 0 \rightarrow x = 2$ es raíz de $R(x)$

$R(-2) = -8 + 12 + 4 = 8 \neq 0$

$R(4) = 64 - 24 + 4 = 44 \neq 0$

$R(4) = -64 + 24 + 4 = -36 \neq 0$

Luego la única raíz racional es $x = 2$.

Claramente, este resultado no nos ayuda a encontrar las raíces irracionales de $R(x)$, si es que la tiene. Pero al encontrar una raíz $(x = 2)$ sabemos que, por la definición del Cociente: $R(x) = (x - 2) \cdot C(x)$
Es decir, $(x - 2)$ es divisor de $R(x)$ o bien: $C(x) = R(x)/(x - 2)$

Aplicando Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -6 & 4 \\ 2 & & 2 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

Luego: $C(x) = x^2 + 2x - 2$
$R(x)$ se escribe: $R(x) = (x - 2)(x^2 + 2x - 2)$

Ahora bien, como las raíces de $C(x)$, también lo son de $R(x)$, busquémoslas:

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

Luego: $x_1 = -1 + \sqrt{3}$ y $x_2 = -1 - \sqrt{3}$ son las raíces irracionales de $R(x)$.

Así todas las raíces de $R(x) = x^3 - 6x + 4$, son:

$x_1 = -1 + \sqrt{3}$

$x_2 = -1 - \sqrt{3}$

$x_3 = 2$

Ejercicio 8: Halle todas las raíces del polinomio

$Q(x) = x^5 - x^4 - 7x^3 + x^2 + 6x$

3.6. Teorema fundamental del álgebra

Un polinomio de coeficientes reales de grado n tiene n raíces (reales o complejas) contadas con su multiplicidad.

Ejemplo:

¿Cuáles son las raíces de $P(x) = 2(x - 1) \cdot (x + 3)^3$?

El polinomio, según el teorema fundamental del álgebra, tiene 4 raíces. Haciendo $P(x) = 0$ hallamos sus raíces: $a = 1$ con multiplicidad uno y $a = -3$ con multiplicidad tres.

Cuando se cuentan las raíces de un polinomio se lo hace contando su multiplicidad. (Nótese que $P(x)$ es de grado 4)

Ejercicio 9: Indique sin efectuar cálculos, los ceros, multiplicidad y el grado del sigiente polinomio

$P(x) = x(x + 4)(x - 2)(x + 1)$

3.7. Factorización

Como ya hemos visto, algunos números enteros se pueden factorizar, y en consecuencia, expresarlos como producto de esos factores.

Así, por ejemplo, el número 15, puede expresarse como un producto de números primos , 15 = 3 · 5, algo similar ocurre con las expresiones algebraicas enteras, es decir, hay algunos polinomios que pueden expresarse como el producto de otros polinomios, por cada uno de los cuales son divisibles, dichos polinomios se llaman polinomio primo o polinomio irreducible.

Definición:

Un polinomio P, de grado mayor que cero, es primo o irreducible sí y solo si toda descomposición del mismo, de la forma $P = Q \cdot C$ es tal que, algunos de los factores es de grado cero.
Con los siguientes ejemplos, podremos comprender mejor.

Ejemplo:

$3x + 7$ es primo ya que: $3x + 7 = 3 \cdot \left(x + \frac{7}{3}\right)$ o
$3x + 7 = 7 \cdot \left(\frac{3}{7}x + 1\right)$ o
$3x + 7 = 9 \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{7}{9}\right)$

Observemos que en todos los casos, alguno de los factores es de grado cero.

Ejemplo:

El polinomio $Q = x^2 - 10x^3$ no es primo pues $x^2 - 10x^3 = x^2(1 - 10x)$, siendo:

El grado de $x^2 > 0$ y el grado de $(1 - 10x) > 0$

Para empezar a hablar de factorización vamos a utilizar el concepto de polinomio primo o irreducible que recién estudiamos.

Decimos que: *Factorizar un polinomio significa expresarlo como producto de una constante por polinomios primos o irreducibles.*

Para ello, tenemos en cuenta las siguientes propiedades:

a. Todo polinomio $P(x)$ de grado n, tiene n raíces.

b. Todo polinomio $P(x)$ de grado n, tiene a lo sumo n raíces reales.

Ejemplo:

$P(x) = 3x^3 + x^2 - 8x + 4$
Sus raíces son: 1; -2; y $\frac{2}{3}$
Pues $P(1) = 0$; $P(-2) = 0$ y $P\ \frac{2}{3} = 0$

Por ser 1 raíz de $P(x)$, según hemos visto, este resulta divisible por $(x-1)$. Aplicando Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 1 & -8 & 4 \\ 1 & & 3 & 4 & -4 \\ \hline & 3 & 4 & -4 & 0 \end{array} = Resto$$

O sea:
$P(x) = (x-1).C(x)$ (*)
$P(x) = (x-1)\cdot(3x^2 + 4x - 4)$

Pero -2 también es raíz de $P(x)$ y por lo tanto, lo es de $C(x)$; luego $C(x)$ es divisible por $(x+2)$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 4 & -8 & -4 \\ -2 & -6 & 4 & 4 & \\ \hline & 3 & -2 & -4 & 0 \end{array} = Resto$$

O sea: $C(x) = (x+2).(3x-2)$

O bien: $C(x) = 3(x+2)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$ (**)
$\frac{2}{3}$ es otra raíz de $P(x)$

Reemplazando (**) en (*) se tiene: $P(x) = 3(x-1)\cdot(x+2)\cdot\left(x-\frac{2}{3}\right)$

Observar que el polinomio dado ha quedado expresado como el producto de su coeficiente principal: 3, por factores mónicos de la forma $(x-x_n)$; siendo x_n todas las raíces de $P(x)$.

Es decir, $P(x)$ está factorizado de tal manera que quedan en evidencia sus raíces.
En general, enunciamos que:

Si un polinomio: $P(x) = a_n\cdot x^n + a_{n-1}\cdot x^{n-1} + \cdots + a_2\cdot x^2 + a_1\cdot x + a_0$ con $a_n \neq 0$ tiene sus n raíces racionales, puede expresarse factorizado en función de las mismas, de la siguiente manera: $P(x) = a_n(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot \ldots\ldots\cdot(x-x_n)$.

3.8. Casos particulares de factorización

a. Factor Común

Una expresión algebraica es factor común de todos los términos de un polinomio cuando aparece repetida en cada uno de esos términos.

Ejemplos:

$7x^3 + 49x^2 = 7x^2(x+7)$ el factor común es $7x^2$

$ba^2 - 3b^2a^3 = ba^2\ (1-3ba)$ el factor común es ba^2

$4x^3y^2 - 2x^2y + \frac{8}{9}x^6zy^{5;}$ el factor común es $2x^2y$

Por consiguiente, sacando $2x^2y$ como factor común, resulta:

$2x^2y\left(2xy - 1 + \frac{4}{9}x^4y^4z\right)$

Como se puede ver, al sacar factor común, el polinomio se transforma en productos; por lo tanto, queda factorizado.

Luego, si en todos los términos de un polinomio figura un factor común, dicho polinomio es igual al producto de ese factor por el polinomio que resulta de dividir cada término por ese factor.

b. Factor Común por Grupos (que tienen la misma cantidad de términos)

Ejemplo:

$3x - 2ab + nx - 2bx + an + 3a$

Vemos que no existe factor común a todos los términos, pero agrupando los términos que admiten factor común, al polinomio dado podemos escribirlo como:

$(3x + nx - 2bx) + (-2ab + an + 3a) = x(3 + n - 2b) + a(-2b + n + 3)$

Sacando factor común $(3+n-2b)$ de esta última expresión, resulta:

$(3 + n - 2b)(x + a)$

c. Trinomio Cuadrado Perfecto

Llamamos así al trinomio tal que dos de sus términos son cuadrados perfectos y el otro es el doble producto de las bases de esos cuadrados: $a^2 + 2ab + b^2$

Puesto que $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$, podemos usar esta igualdad para factorizar algunos trinomios de segundo grado:

Ejemplo:

$P(x) = x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = (x + 5)(x + 5)$

$25x^2 + 10xy^2 + y^2 = (5x + y^2)^2$

d. Cuatrinomio Cubo Perfecto

Llamamos así a todo cuatrinomio de la forma: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Puesto que $(a + b)^3$= $(a + b)^2(a + b)$=$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Podemos usar esta igualdad para factorizar algunos cuatrinomios de tercer grado:

Ejemplo:

$Q(t) = t^3 + 6t^2 + 12t + 8 = t^3 + 3 \cdot 2 \cdot t^2 + 3 \cdot 2^2t + 2^3 = (t + 2)^3$

Ejemplo:

$0{,}001a^3 + 30ab^2 - 1000b^3 - 0{,}3a^2b = (0{,}1a - 10b)^3$

e. Diferencia de cuadrados

Todo polinomio que es diferencia de cuadrado es igual al producto de la diferencia de las bases de dichos cuadrados por la suma de las mismas, es decir:
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Ejemplos:

$b^2 - 9 = (b+3)\cdot(b-3)$

$x^4 - 16a^4 = (x^2-4a^2)(x^2+4a^2) = (x-2a)(x+2a)(x^2+4a^2)$

$a^2x^4 - y^2 = (ax^2-y)(ax^2+y)$

Ejercicio 9: Factoriza las siguientes expresiones, combinando los distintos casos de factores:

$5a^2b + 125b^6x^8 - 50ax^4b^4 =$

$a^2m - b^2m - a^2n + b^2n =$

$\frac{20}{9}x^5b^3 - 5x^3b =$

$a^3 - a^2 - a + 1 =$

3.9. Resolución de ecuaciones polinómicas

Para resolver una ecuación polinómica como por ejemplo $x^3+3x-x^2=3$, debemos tener en cuenta que es equivalente a buscar las raíces del polinomio x^3+3x-x^2-3, con lo cual podremos valernos de los métodos de factoreo vistos.

Ejemplo:

$x^3+3x-x^2=3,$

En este caso podremos factorizar por grupos

$x(x^2+3)-(x^2+3)=0$

$(x^2+3)(x-1)=0$

$x^2+3=0$ ó $x-1=0$

$x=\pm\sqrt{-3}$ ó $x=1$

En este caso la ecuación posee una solución real y dos imaginarias.

Ejemplo:

$2x^3+7x^2-27x+18=0$

En este caso utilizaremos el Lema de Gauss para determinar las posibles raíces del polinomio $P(x)=2x^3+7x^2-27x+18$:

Posibles raíces racionales $\left\{a=\frac{p}{q}=\pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ \pm6;\ \pm9;\ \pm18;\ \pm\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{2};\ \pm\frac{9}{2}\right\}$

$P(1)=2.1^3+7.1^2-27.1+18=0$

$P(-1)=2.(-1)^3+7.(-1)^2-27.(-1)+18=50$

Podríamos continuar buscando las siguientes raíces o utilizar la raíz que hemos descubierto para factorizar el polinomio:

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 7 & -27 & 18 \\
1 & & 2 & 9 & -18 \\
\hline
 & 2 & 9 & -18 & 0
\end{array} = Resto$$

Por lo que la ecuación queda factorizada

$(x-1)(2x^2+9x-18)=0$

Por ser un producto nulo sabemos que se debe cumplir

$x-1=0$ ó $2x^2+9x-18=0$

De la primera ecuación obtenemos la solución que ya teníamos $x_1=1$. Luego debemos resolver la ecuación cuadrática, para la cual podemos aplicar la formula resolvente:

$$x_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 2\cdot(-18)}}{2\cdot 2}=\frac{-9\pm 15}{4}$$

$x_2=\frac{3}{2}$; $x_3=-6$

Con lo cual hemos obtenido las tres soluciones de la ecuación.

Práctica del capítulo 3

Ejercicio 1: Halla las siguientes sumas

a. $\frac{5}{7}a^2+\frac{2}{3}a^2+a^2=$

b. $(3x^2-2x+3)+\left(2x-x^2-\frac{1}{2}=\right)$

c. $\left(\frac{5}{2}h^2-2h\right)+(-h+2)+\left(\frac{3}{2}h-5\right)=$

d. $\left(2m-\frac{1}{3}m^2+2\right)+\left(\frac{2}{5}m-1\right)+\left(3+\frac{1}{3}m^2-\frac{3}{5}m\right)=$

Ejercicio 2: Halla las siguientes diferencias:

a. $\frac{5}{2}m-\left(-\frac{1}{2}m\right)=$

b. $4-\left(\frac{3}{5}a-\frac{1}{2}a^2+\frac{2}{3}\right)-\left(-\frac{5}{2}a^2+\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}\right)=$

c. $8-\left(-\frac{1}{6}s^3-s^2+0{,}1\right)-\left(0{,}1s^3-0{,}9s^2-s+\frac{1}{10}\right)=$

d. $(0{,}32y+3y^3-0{,}7)-(-0{,}2y+0{,}07-1{,}2y^2)=$

Ejercicio 3: Realiza las siguientes operaciones:

a. $\frac{3}{2}a-\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}a=$

b. $(3a-4a^2)+\left(2a+\frac{1}{2}a^2\right)-(5a-2a^2)=$

c. $-\left(0{,}4x-x^2+\frac{1}{2}\right)-(-0{,}2x+x^2)+(0{,}3-5x)=$

d. $\left[\frac{3}{4}h-\left(-\frac{1}{2}h\right)\right]-\left[-\frac{1}{4}h+\left(-\frac{2}{3}h\right)\right]=$

e. $\left\{-y+\frac{2}{3}y-\left[-\left(-\frac{1}{5}y\right)-(-2y)+y^2\right]\right\}$

f. $\left(3z-\frac{5}{2}z+z^2\right)-\left(2z+\frac{1}{2}z+3\right)+\left(z^2-\frac{1}{2}\right)=$

Ejercicio 4:

Dados: $P(d) = -\frac{1}{5}d^4 - d$ $\quad$ $Q(d) = 0{,}2d^2 - 3d$ y $R(d) = 0{,}2d^4 - 2d + \frac{1}{2}d^2$

Calcular:

a. $\mathrm{P} + \mathrm{Q} + \mathrm{R}$

b. $\mathrm{P} + \mathrm{Q} - \mathrm{R}$

c. $\mathrm{P} - \mathrm{Q} - \mathrm{R}$

Ejercicio 5: Multiplicación de polinomios

a. $-3\mathrm{b}.\,4\mathrm{b}^3$

b. $-(-\mathrm{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2}\mathrm{x}\right) \cdot (-2\mathrm{x}) \cdot 3\mathrm{x}^2$

c. $-5\mathrm{m}^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot (-2\mathrm{m}) \cdot \frac{3}{10} \cdot \mathrm{m}^3$

d. $(-2\mathrm{a})(\mathrm{a} - 3\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{a}^3 - \mathrm{a}^4$

e. $(\mathrm{a} + 3) \cdot ((\mathrm{a} + 5)$

f. $(\mathrm{x}^2 + \mathrm{x} + 1)(\mathrm{x} - 1)$

Ejercicio 6: Calcula el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a. $(2x^3 - 9x^2 + 4x + 10) : (2\,x - 5) =$

b. $(x^4 - 2\,x^3 - 2\,x^2 - 3) : (x^2 - 2x + 1 =$

c. $(x^4 - 13\,x^2 + 17x + 17) :(x + 4) =$

d. $\left(32x^5 - 1\right) : \left(2x - 1\right) =$

e. $(x^5 + x^3 + 1) : (x^2 + 1) =$

f. $(x^2 - 2x + 1) : (x^2 + 3x - 2) =$

g. $(x^3 - 0{,}1x^2 + 2{,}3x + 1) : (0{,}5x + 0{,}2) =$

h. $(x^6 + 2\,x^4 - 14\,x^2 + 6) : (x^2 + 5) =$

i. $\left(\frac{1}{2}x^{12} - \frac{19}{6}x^9 + \frac{3}{2}x^6 - \frac{1}{6}x^3\right) : \left(x^3 - \frac{1}{3}\right) =$

Ejercicio7: Realiza las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a. $(x^3 - 7x^2 + 14x - 21) : (x - 2) =$

b. $(x^2 + 7x + 12) : \left(x - 3\right) =$

c. $\left(\frac{25}{2}x^2 - 10x - \frac{5}{2}\right) : \left(x + \frac{1}{5}\right) =$

d. $\left(\frac{1}{9}x^4 - \frac{4}{27}x^3 + \frac{1}{3}x^2 + 3x - \frac{7}{1}\right) : (x + 3) =$

e. $\left(2x^5 - x^3 + x - \frac{1}{6}\right) : (x + 1) =$

f. $(x^5 + 32) : (x + 2) =$

Ejercicio 8: Hallar los valores de a y b.

El polinomio $P(x) = x^4 - a\,x^3 + bx^2$ tiene como raíces $x = 3$ y $x = -1$.

Ejercicio 9: Hallar todas las raíces de los siguientes polinomios sabiendo que r es una de ellas:

a. $A(x) = x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x$ $\qquad r = 1$

b. $B(x) = x^3 - 3x^2 - 2x - 8$ $\qquad r = 4$

c. $C(x) = 2\,x^3 + 6\,x^2 + 2x + 6$ $\qquad r = -3$

d. $D(x) = 3\,x^4 + 5\,x^3 - 5\,x^2 - 5x + 2$ $\qquad r = \frac{1}{3}$

e. $E(x) = 6x^3 + 5x^2 + 3x + 1$ $\qquad r = -\frac{1}{3}$

Ejercicio 10: Hallar la única raíz real de $Q(x)$.

El polinomio $Q(x) = 2x^3 - 18x^2 + x - 9$ es divisible por $G(x) = 2\,x^2 + 1$.

Ejercicio 11: Encontrar los valores de a tales que al dividir

$x^2 + 5x - 2$ por $(x - a)$ el resto sea igual a -8.

Ejercicio 12: Expresar los siguientes polinomios como productos y hallar sus raíces reales.

a. $A(x) = x^4 - x$

b. $P(x) = 2x^7 + 3x^6 - 5x^5$

c. $L(x) = 5x^3 - 10x^2 + 5x - 10$

d. $B(x) = x^2 - 6x + 9$

e. $R(x) = -2x^2 + 162$

f. $S(x) = x^4 - 81$

g. $W(x) = 4\,x^7 + 4x$

h. $N(x) = 3\,x^2 - 15$

i. $C(x) = x^4 + 12x^2 + 36$

j. $M(x) = 2x^3 - 48x^2 + 288x$

Ejercicio 13:

El desplazamiento lateral de una barra de choques, t segundos después del momento en que un vehículo la golpea, está dado por $f(t) = kt(t-3)^2$

a. Hallar el valor de k sabiendo que dos segundos después del impacto, el desplazamiento lateral es de 40 cm.

b. Para ese valor de k, hallar los ceros de f (t).

Ejercicio 14:

El servicio meteorológico utilizó como modelo para la variación de la temperatura (en grados centígrados) durante cierto día, la siguiente fórmula:

$p(t) = 0{,}04t(t-12)(t-24)$

Donde t está medido en horas, y $t = 0$ corresponde a las 6 am. ¿A qué hora la temperatura fue de 0º?

Ejercicio 15:

El crecimiento de dos poblaciones A y B responden a las siguientes fórmulas:

$PA(t) = \frac{5}{2}t + 30$

$PB(t) = t^3 - 12t^2 + 44t - 8$

Donde t es el tiempo de conteo expresado en semanas. Si ambas poblaciones coinciden en la cuarta semana, ¿tienen en algún otro momento el mismo número de individuos?

Ejercicio 16: Factoriza las siguiente expresiones:

a. $6x^4 + 21x^3 - 18x^2 =$

b. $6a - 9 - a^2 =$

c. $2m^2 + 11m - 21 =$

d. $x^3 + 64 =$

e. $9n^2 + 12n + 4 =$

f. $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 =$

g. $2mb - an + 2mn - ab =$

h. $3^3 + 2x^2 - 15x =$

i. $yz - 2xw + 2yw - xz =$

j. $6a^2 + 7a - 20 =$

4. Funciones Exponencial y Logarítmicas

4.1. Funciones Exponenciales

La función f definida por $f(x) = b^x$ donde $b > 0$; $b \neq 1$ y el exponente x cualquier número real, es llamada Función Exponencial con base b.

No confunda la función exponencial $y = 2^x$ con la función potencia $y = x^2$ que tiene una base variable y un exponente constante.

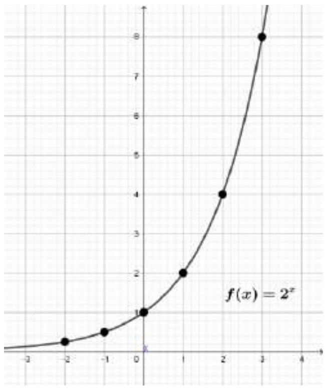
Grafica de funciones exponenciales

a. Grafica de una función exponencial con $b > 1$.

Ejemplo: $f(x) = 2^x$

Completamos la tabla y utilizando el sistema de referencia usual de coordenadas cartesianas, ubicamos los puntos y uniéndolos, obtenemos la gráfica de la figura.

x	$y = 2^x$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



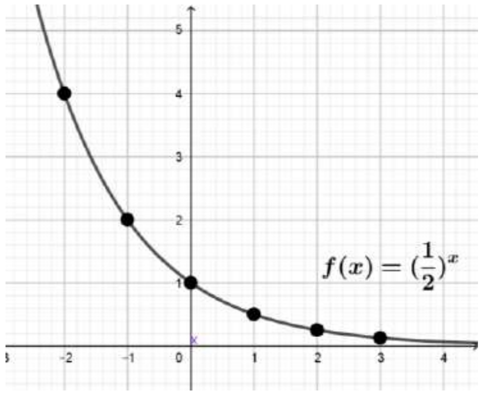
Podemos hacer algunas observaciones acerca de esta gráfica. El dominio de cada función es el conjunto de todos los números reales y el rango todos los números reales positivos. La gráfica tiene intercepción con el eje y en el punto $(0,1)$. Además, esta grafica tiene la misma forma general. Asciende de izquierda a derecha. Conforme x aumente, $f(x)$ también aumenta. De hecho $f(x)$ aumenta sin límite. En el segundo cuadrante vemos que cuando x se hace más pequeño la gráfica de la función se aproxima al eje x. Esto explica que los valores sean muy cercanos a 0.

b. Grafica de una función exponencial con $0 < b < 1$

Ejemplo: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Se procede de igual manera que en el ejemplo anterior. Se construye la tabla, ubicando los puntos y uniéndolos, obtenemos la gráfica de la figura.

x	$y = \frac{1}{2}^x$
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



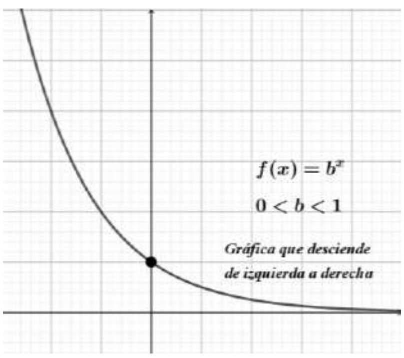
Observe que el dominio son todos los números reales y el rango todos los números reales positivos. La grafica tiene intercepción con el eje y en el punto $(0,1)$. Comparando con la gráfica del ejemplo anterior, aquí la gráfica desciende de izquierda a derecha. Esto es, conforme x aumente, $f(x)$ disminuye. Observe que cuando x toma valores positivos cada vez más grandes $f(x)$ toma valores muy cercanos a cero y la gráfica se aproxima al cero. Sin embargo, cuando x toma valores negativos la función crece indefinidamente.

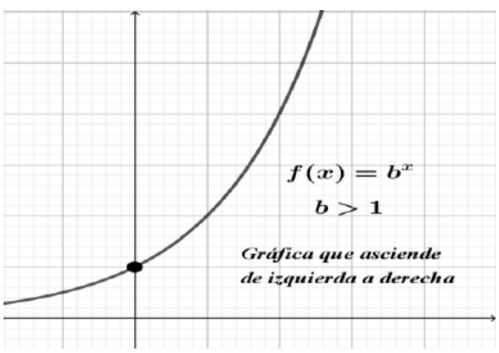
En general, la gráfica de una función exponencial tiene una de las dos formas de los ejemplos dados, dependiendo del valor de la base b.

Propiedades de la función exponencial $\boldsymbol{f(x) = b^x}$

El dominio de una función exponencial es el conjunto de todos los números reales. El rango es el conjunto de todos los números positivos.

La grafica de $f(x) = b^x$ tiene intercepción con el eje y en el punto $(0,1)$.





Si $b > 1$, la gráfica asciende de izquierda a derecha.

Si $0 < b < 1$, la gráfica desciende de izquierda a derecha.

Si $b > 1$, la gráfica se aproxima al eje x conforme x toma valores negativos cada vez más grandes en valor absoluto.

Si $0 < b < 1$, la gráfica se aproxima al eje x conforme x toma valores positivos cada vez más grandes.

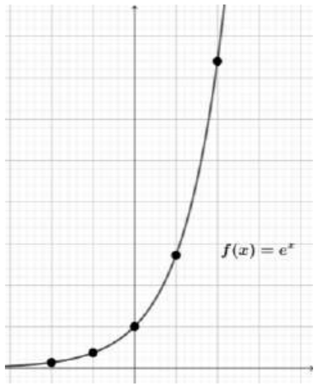
Función exponencial con base e

Uno de los números más útiles para base de una función exponencial es cierto número irracional denotado por la letra e, en honor del matemático suizo Leonardo Euler (1707-1783):

$e = 2{,}71828 \dots \dots$

La grafica de $y = e^x$ se muestra en la siguiente gráfica. La tabla adjunta a la figura indica los valores de y con dos decimales.

x	$y = e^x$
-2	$0{,}14$
-1	$0{,}37$
0	1
1	$2{,}72$
2	$7{,}39$



Algunas aplicaciones de la función exponencial

a. Crecimiento de Bacterias

El número de bacterias presentes en un cultivo después de t minutos está dado por:

$$N(t) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^t$$

Observe que $N(t)$ es un múltiplo constante de la función exponencial $\left(\frac{4}{3}\right)^t$

¿Cuántas bacterias están presentes al inicio?

Solución: Aquí queremos determinar $N(t)$ cuando $t = 0$

$$N(0) = 300 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^0 = 300(1) = 300$$

Así que 300 bacterias están presentes inicialmente.

¿Aproximadamente cuantas bacterias están presentes después de 3 minutos?

Solución:

Tenemos: $N(3) = 300\left(\frac{4}{3}\right)^5 = 300\frac{64}{27} = \frac{6400}{9} \approx 711$

Así que aproximadamente 711 bacterias están presentes después de 3 minutos.

b. Crecimiento Poblacional

La población proyectada P de una ciudad está dada por $P = 100.000e^{0,05t}$ donde t es el número de años después de 1990. Pronosticar la población del año 2010.

Solución: El número de años desde 1990 hasta 2010 es 20, de modo que hacemos $t = 20$. Entonces: $P = 100.000e^{0,05(20)} = 100.000e^{1} = 100,000e \approx 271.828$

c. Decaimiento radiactivo

Por su naturaleza los elementos radiactivos tienden a disminuir hasta agotarse conforme transcurre el tiempo. Por ello decimos que un elemento radiactivo decae. Si N es la cantidad en el tiempo t, entonces puede demostrarse que:
$N = N_0e^{-2t}$
La constante N_0 representa la cantidad del elemento presente en el tiempo $t = 0$ y es llamada la cantidad inicial. La constante λ depende del elemento en particular que se esté tratando y es la constante de decaimiento.

Ejemplo:

Un elemento radiactivo decae de modo que después de t días el número de miligramos presentes N, está dado por $N = 1000e^{-0.062t}$

¿Cuántos miligramos están presentes inicialmente?

Solución: Esta ecuación tiene la forma de la ecuación $N = N_0e^{-2t}$, donde $N = 100$ y $\lambda = 0,062$; N_0 es la cantidad inicial y corresponde a $t = 0$. Así, inicialmente están presentes 100 miligramos.

¿Cuántos miligramos están presentes después de 10 días?

Solución: Cuando $t = 10$

$N = 100e^{-0,62} \approx 53,8$

Así que aproximadamente 53.8 miligramos están presente después de 10 días.

4.2. Funciones Logarítmicas

La función logarítmica de base b, donde $b > 0$ y $b \neq 1$, es denotada por log_b y es definida por: $y = log_b x$ si y solo si $b^y = x$

El dominio de log_b es el conjunto de todos los números reales positivos y el rango el conjunto de todos los números reales.

Puesto que una función logarítmica invierte la acción de la correspondiente función exponencial y viceversa, cada función logarítmica es llamada inversa de su correspondiente función exponencial y cada función exponencial es la inversa de su correspondiente función logarítmica.

Recuerde: cuando decimos que y es el logaritmo en base b de x, queremos decir que b elevado a la potencia y es igual a x.

$y = log_b x$ significa $b^y = x$

Conversión de forma exponencial a forma logarítmica

Forma Exponencial		Forma Logarítmica
$5^2 = 25$	entonces	$log_5 25 = 2$
$3^4 = 81$	entonces	$log_3 81 = 4$
$10^0 = 1$	entonces	$log_{10} 1 = 0$

Conversión de forma logarítmica a forma exponencial

Forma Logarítmica		Forma Exponencial
$log_{10} 1000 = 3$	significa	$10^3 = 1000$
$log_{64} 8 = \frac{1}{2}$	significa	$64^{\frac{1}{2}} = 8$
$log_2 \frac{1}{16} = -4$	significa	$2^{-4} = \frac{1}{16}$

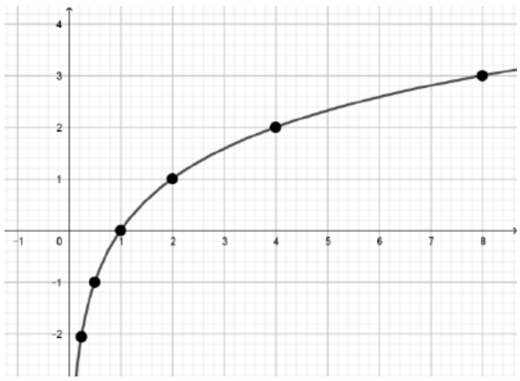
Grafica de una función logarítmica

a. Grafica de una función logarítmica con $b > 1$.

Ejemplo: $y = log_2 x$

Completamos la tabla, usando la forma $x = 2^y$

x	y
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2
8	3

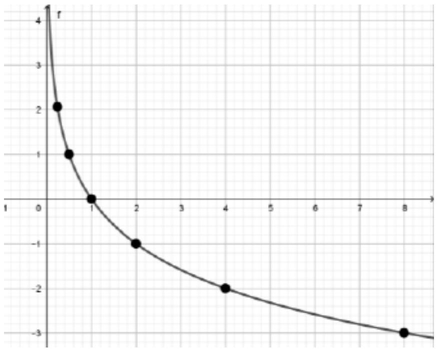


b. Grafica de una función logarítmica con $0 < b < 1$

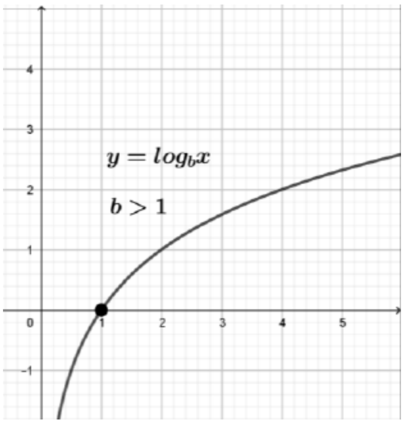
Ejemplo: $y = log_{\frac{1}{2}}x$

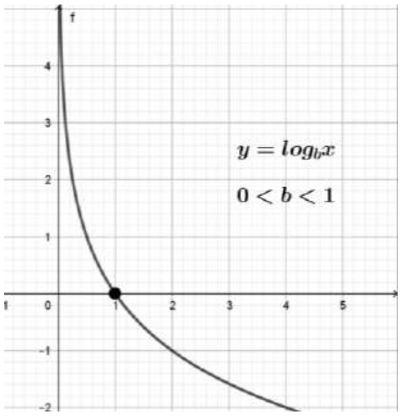
Para trazar los puntos usamos la forma exponencial equivalente $x = \left(\frac{1}{2}\right)^y$

x	y
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	-1
4	-2
8	-3



Resumiendo los resultados de los ejemplos anteriores podemos decir que la gráfica de una función logarítmica tiene una de dos formas generales, dependiendo si $b > 1$ o si $0 < b < 1$





Para $b > 1$ la gráfica asciende de izquierda a derecha; conforme x se acerca a 0, los valores de la función decrecen sin una cota y la gráfica se acerca al eje y.

Para $0 < b < 1$ la gráfica desciende de izquierda a derecha; conforme x se acerca a 0, los valores de la función crecen sin una cota y la gráfica se acerca al eje y.

Propiedades de la función logarítmica $f(x) = \log_b x$

El dominio de una función logarítmica es el intervalo $(0; \infty)$ esto es, no existe logaritmo de números negativos ni del cero.

El rango es el intervalo $(-\infty; \infty)$.

El logaritmo de 1 es 0, y corresponde a la intercepción con el eje x en el punto $(1; 0)$

Observaciones

Los logaritmos de base 10 son llamados logaritmos comunes. Fueron utilizados con frecuencia para propósitos computacionales antes de la época de las calculadoras. En general, se omite el subíndice 10 de la notación:

$log\ x$ significa $\log_{10} x$

Los logaritmos de base e son importantes en cálculo y son llamados logaritmos naturales. Usamos la notación “ln” para tales logaritmos:
$\ln x$ significa $\log_e x$

Algunas aplicaciones

Ecuaciones logarítmicas y exponenciales

Ejemplo 1: Resolver: $\log_2 x = 4$

Solución: Podemos obtener una expresión explicita para x escribiendo la ecuación en forma exponencial. Esto da: $2^4 = x$ de modo que $x = 16$.

Ejemplo 2: Resolver: $\ln(x + 1) = 7$

Solución: La forma exponencial da: $e^7 = x + 1$ por lo tanto $x = e^7 - 1$

Ejemplo 3: Resolver: $\log_x 49 = 2$

Solución: En forma exponencial, $x^2 = 49$ de modo que $x = 7$ .Se desecha -7, ya que un número negativo no puede ser base de una función logarítmica.

Ejemplo 4: Resuelva: $e^{5x} = 4$

Solución: Podemos obtener una expresión explicita para x escribiendo la ecuación en forma logarítmica. Esto da $\ln 4 = 5x$, entonces $x = \frac{ln4}{5}$

Practica del Capítulo 4

Ejercicio 1: Grafique cada una de las siguientes funciones.

a. $y = f(x) = 3^{x+2}$

b. $y = f(x) = 2^3 - 1$

c. $y = f(x) = 3(2)^x$

Ejercicio 2: La población proyectada P de una ciudad está dada por $P = 125.000(1{,}12)^{\frac{t}{20}}$ donde t es el número de años a partir de 1995.

¿Cuál es la población estimada para el año 2015?

Ejercicio 3: De un elemento radiactivo, queda N gramos después de t horas, donde $N = 10e^{0{,}028t}$

a. ¿Cuántos gramos están presentes inicialmente?

b. ¿Cuántos gramos permanecen después de 10 horas?

c. ¿Y de 50 horas?

d. En base a su respuesta del inc c). ¿Cuál es su estimación de la vida media del elemento?

Ejercicio 4: En cierto tiempo 100 miligramos de una sustancia radiactiva. Decae de modo que después de t años el número de miligramos presentes N, esta dado por $N = 100e^{-0{,}035t}$ ¿Cuántos miligramos están presentes después de 20 años? Dé su respuesta al miligramo más cercano.

Ejercicio 5: Grafique las siguientes funciones.

a. $y = f(x) = \log_2(x-4)$

b. $y = f(x) = \log_2(-x)$

c. $y = f(x) = -2\ln x$

Ejercicio 6: La ecuación de oferta de un fabricante es $p = \log\left(10 + \frac{q}{2}\right)$ donde q es el número de unidades ofrecidas con el precio p por unidad.

¿A qué precio el fabricante ofrecerá 1980 unidades?

Ejercicio 7: La magnitud M de un temblor y su energía E están relacionadas por la ecuación $1{,}5M = \log\left(\frac{E}{2{,}5x10^{11}}\right)$ .Aquí M esta dada en términos de la escala Ritcher de 1958 y E está en ergios.

Resuelva la ecuación para E.

Ejercicio 8: La presión atmosférica p varía con la altitud h sobre la superficie de la Tierra. Para altitudes arriba de los 10 kilómetros, la presión p (en milímetros de mercurios) está dada en forma aproximada por $p = 760e^{-0{,}125h}$ donde h está en kilómetros.

a. Encuentre p a una altitud de 7.3 km.

b. ¿A qué altitud la presión será de 400 mm de mercurio?

Ejercicio 9: Una muestra de 100 miligramos de actinio radiactivo $227(^{227}Ac)$ decae de acuerdo con la ecuación $N = 100e^{-0{,}0319t}$ donde N es el número de miligramos presentes después de t años.

Determine la vida media del ^{227}Ac a la décima de año más cercana.

Ejercicio 10: Resuelva las siguientes ecuaciones exponenciales

a. $2^{x+1} = 32$

b. $64^x = 8$

c. $4^x = \frac{1}{16}$

d. $\frac{8}{27}^x = \frac{4}{9}$

e. $32^{x+2} = 2^{x^2+4}$

f. $5^{x^2-3x} = 625$

g. $e^{x^2} = e^{7x-12}$

Ejercicio 11: Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas

a. $\log_x 32 = 5$

b. $\ln x = 3{,}7$

c. $\log_x 2 = -0{,}5$

d. $\ln x^2 = -2$

e. $\log(x+1) - \log(x-2) - \log 2 = 0$

f. $\ln x + \ln(x+6) = \frac{1}{2}\ln 9$

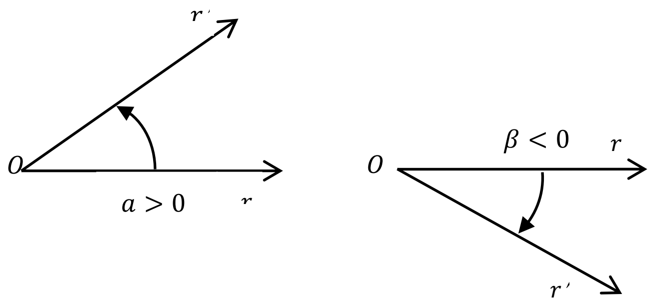
5. TRIGONOMETRÍA

5.1. Ángulos orientados en el plano

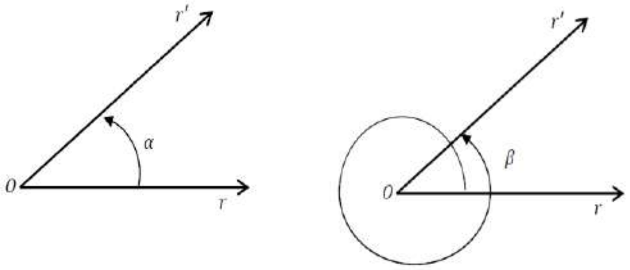
Definición de ángulo

Un ángulo está definido por una semirrecta r, que gira alrededor de su origen O (punto fijo), desde la posición inicial r hasta la posición final r'.

Si la rotación es en sentido antihorario (contrario a las agujas del reloj), el ángulo generado es positivo. Si la rotación es en sentido horario el ángulo generado es negativo. A continuación mostramos ambos casos.



Observemos que la semirrecta puede pasar a la posición final r' directamente, o después de dar 1, 2, 3, ó k giros completos en sentido positivo o negativo. Como los lados de estos ángulos coinciden aunque no son iguales, pues difieren en uno o más giros, se llaman congruente respecto de los giros.



Los ángulos α y β son congruentes respecto de los giros porque difieren un giro
En general, se puede expresar β como $\beta = \alpha + k$ giros

Sistemas de medición

Los sistemas de medición de ángulos más frecuentemente usados son el Sistema ***sexagesimal*** y el sistema *radial* o ***circular***.

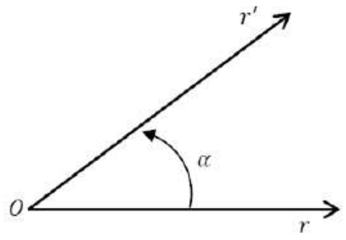
Sistema sexagesimal

La unidad de medida de éste sistema es el grado (º), definido como la noventa avas partes de un ángulo recto.
Así $1° = \frac{R}{90}$ siendo R la medida del ángulo recto.

En éste sistema los submúltiplos de la unidad, son el minuto (′) y el segundo (″) definidos como la sesenta avas partes y 3600 avas partes respectivamente de la unidad. Es decir: $1' = \frac{1°}{60}$ y $1'' = \frac{1°}{3600} = \frac{1'}{60}$

Sistema radial o circular

Este sistema se basa en la medición de los arcos de circunferencia, que se describe al girar la semirrecta r hasta r'.
Observemos la siguiente figura, la semirrecta r gira en torno a O hasta r' generando el ángulo $\alpha = r\hat{O}r'$ y el arco de circunferencia $\widehat{r\,r'}$.



En el sistema radial o circular se define como la unidad de medida al radián, que es la medida del arco de circunferencia, cuya longitud es igual al radio de la circunferencia a la que pertenece.
O sea, si la longitud de la semirecta $\overline{Or}$ es igual a la longitud del arco $\widehat{r\,r'}$, entonces el ángulo α se llama ángulo correspondiente a 1 radián.

Equivalencias entre el sistema sexagesimal y el radial

Dado que un giro completo en grados es 360º y medido en radianes es 2π, entonces podemos escribir para cada ángulo medido en grados la siguiente correspondencia en radianes.

$\alpha = 360°$ → 2π radianes

$\beta = 180°$ → π radianes

$\gamma = 90°$ → $\frac{\pi}{2}$ radianes

Luego, para saber cualquier otra medida aplicamos regla de tres simple y obtenemos los resultados. Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo: ¿A cuántos grados sexagesimales equivale 1 radián?

Solución: Por regla de tres simple obtenemos:

π radianes → $180°$

1 radian → $x = \frac{1\,radián \cdot 180°}{\pi\,radián} = \frac{180°}{3{,}14159} = 57{,}296° = 57°\,17'45{,}6''$

Ejercicio 1: Expresar las siguientes medidas en radianes.

a. $25°$
b. $60°$

c. $30°$
d. $240{,}5°$

Ejercicio 2: Expresar las siguientes medidas en grados sexagesimales.

a. $1{,}5$

b. $0{,}017453292$

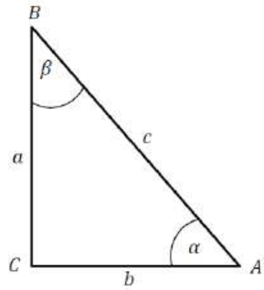
c. $15{,}84$

d. 2

5.2. Funciones Trigonométricas en un triángulo rectángulo.

La geometría realiza un estudio de las distintas figuras geométricas reconociendo y estudiando los elementos que componen dicha figura, aunque no establece una relación estricta entre esos elementos.

La trigonometría hace un estudio exhaustivo de la relación entre los elementos fundamentales (lados y ángulos) de las figuras geométricas. De estas figuras consideramos una de las más simples como es el triángulo rectángulo (uno de sus ángulos es de 90°) relacionando sus lados y ángulos mediante "las definiciones fundamentales de la Trigonometría".



Sea el triángulo rectángulo $A\hat{B}C$

α = Uno de sus ángulos agudos.
a = Cateto opuesto al ángulo α
b = Cateto adyacente al ángulo α
c = Hipotenusa del triángulo rectángulo.
$\alpha + \beta + 90° = 180°$ (suma de los ángulos interiores del triángulo rectángulo).
$\alpha = 90° - \beta$

Relacionemos el cateto opuesto al ángulo α, (a) la hipotenusa (c) y el ángulo α mediante la definición de la función :

$$sen\,\alpha = \frac{a}{c} = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

Relacionemos el cateto adyacente al ángulo α (b) con la hipotenusa (c) y el ángulo α , mediante la definición de la función:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$$

Relacionemos los catetos del triángulo rectángulo (a) y (b) mediante la definición de la función:

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Las relaciones recíprocas (no inversas) de las anteriores definen las siguientes funciones.

$cosec\ \alpha = \frac{1}{sen\ \alpha} = \frac{c}{a} = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$

$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{c}{b} = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$

$cotg\ \alpha = \frac{1}{tg\ \alpha} = \frac{b}{a} = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$

Además podemos relacionar los tres lados entre sí por el teorema de Pitágoras, De acuerdo al triángulo de la figura: $a^2 + b^2 = c^2$ .Si dividimos ambos miembros por c^2, $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ reemplazando en el primer miembro por la funciones seno y coseno nos queda:

$(sen\ \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$

$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{\cos \alpha}$

Conocida la función trigonométrica seno podemos calcular las cinco funciones restantes.
$\cos \alpha = \pm\sqrt{1 - sen^2\alpha}$

$tg\ \alpha = \pm\frac{sen\ \alpha}{\sqrt{1 - sen^2\alpha}}$

Y las tres restantes haciendo las recíprocas del seno α, coseno α y tangente α

Ejercicio 3: Hallar las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de los siguientes ángulos

$\frac{\pi}{6}$

$\frac{3}{2}\pi$

5.3. Resolución de triángulos

Resolución de Triángulos Rectángulos

Los triángulos rectángulos tienen muchas aplicaciones, en parte porque son muchas las situaciones en el mundo real que los comprenden. Antes de resolver algunos problemas, observemos que hay seis medidas asociadas con cada triángulo rectángulo; la medida de sus tres ángulos en grados y las medidas de sus tres lados. Debido a que el triángulo es rectángulo siempre conocemos una de esas medidas (uno de los ángulos es de 90º). Si se dan “dos” de las cinco medidas restantes, incluyendo la medida de por lo menos un lado, entonces podemos calcular las otras tres por medio de:

a. Las funciones trigonométricas $sen\ \alpha$, $\cos \alpha$ y $tg\ \alpha$

b. La suma de los ángulos internos.

c. El teorema de Pitágoras.

Después de haber determinado las seis medidas, decimos que el triángulo rectángulo está resuelto.

Ejemplos: A continuación damos distintos casos que se pueden presentar en trigonometría.

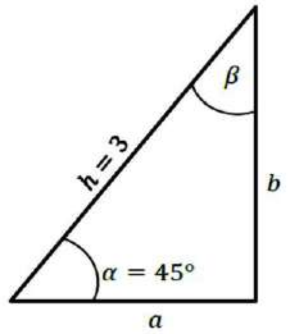
Datos: Un ángulo y la hipotenusa

Hallamos: Un ángulo y los dos lados

$\beta = 90° - \alpha = 45°$

$a = h \cos 45° = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$

$b = h\, sen\, 45° = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$



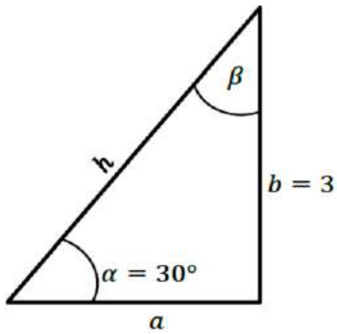
Datos: Un ángulo y un lado

Hallamos: Un ángulo, un lado y la hipotenusa

$\beta = 90° - \alpha = 60°$

$\frac{b}{a} = tg\ 30° \Rightarrow h = \frac{b}{tg\ 30°} = 2\sqrt{3} = 3{,}464$

$\frac{b}{h} = sen\ 30° \Rightarrow h = \frac{b}{sen\ 30°} = 2b = 4$



Datos: La hipotenusa y un lado

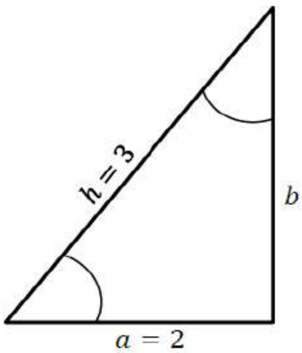
Hallamos: Un lado y los dos ángulos

$b = \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} = 2{,}236$

$\cos\alpha = \frac{a}{h} = \frac{2}{3} \Rightarrow \alpha = arc\cos\frac{2}{3}$

$\alpha = 48°; 19 = 48°\ 11'24''$

$\beta = 90° - 48°\ 11'24'' = 41°\ 48'36''$



Datos: Dos lados.

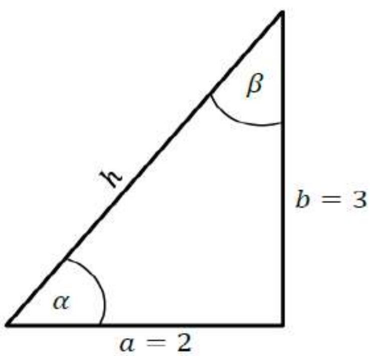
Hallamos: Los dos ángulos y la hipotenusa.

$h = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{9+4} = 3{,}6$

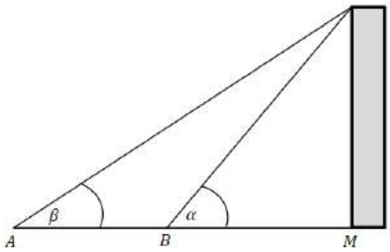
$tg\ \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \alpha = arc\ tg\frac{3}{2} = 56°{,}31$

$\alpha = 56º\ 18'36''$

$\beta = 90° - 56°\ 18'36'' = 33°\ 41'24''$



Ejercicio 6: La altura de la torre de la figura es de 35,083 m. Calcular la distancia AB entre las dos posiciones sucesivas de un observador, si $\alpha = 50° \ 12'$ y $\beta = 32° \ 54'$

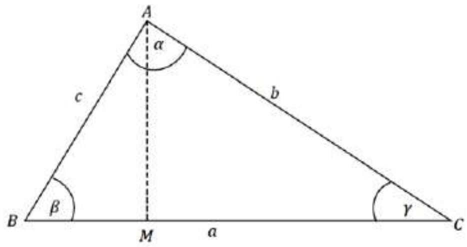


Teorema del seno y teorema del coseno

Si tenemos un triángulo del cuál conocemos tres datos (entre los cuales figura la longitud de un lado) podemos calcular todas las medidas de sus elementos.

Estableceremos dos fórmulas generales.

Consideremos un triángulo de vértices A, B, C. y llamemos α, β y γ a los ángulos correspondientes a los tres vértices, y con a, b y c a las longitudes de los lados opuestos a A, B y C (ver Figura siguiente)|



Trazamos la altura correspondiente a un vértice, por ejemplo al vértice A, y sea h la longitud de esta altura. Analizando los dos triángulos rectángulos producidos: el AMB y el AMC tenemos lo siguiente:

$$sen\ \beta = \frac{h}{c}$$

$$sen\ \gamma = \frac{h}{b}$$

Luego: $h = c \cdot sen\ \beta$ (I) y $h = b \cdot sen\ \gamma$ (II)

Igualando (I) y (II) y dividiendo ambos miembros por: $sen\ \beta . sen\ \gamma$ tenemos:

$$\frac{b}{sen\ \beta} = \frac{c}{sen \gamma} \quad \text{(III)}$$

Igualmente, si ahora consideramos la altura correspondiente al vértice C, obtenemos,

$h = a \cdot sen\ \beta$ (IV) y $h = b \cdot sen\ \alpha$ (V)

Igualando (IV) y (V) y dividiendo ambos miembros por: $sen\ \beta . sen\ \propto$ tenemos

$$\frac{b}{sen\ \beta} = \frac{a}{sen\ \alpha} \quad \text{(VI)}$$

Igualando (VI) y (III) tenemos:

$\frac{a}{sen\ \alpha} = \frac{c}{sen\ \gamma} = \frac{b}{sen\ \beta}$ Este resultado es conocido como:

Teorema del seno:

En todo triángulo, las razones obtenidas al dividir la longitud de cada lado por el seno del ángulo opuesto, son iguales.

Utilizando la Figura anterior podemos deducir otra fórmula que podrá sernos muy útil en la búsqueda de los elementos de un triángulo.

Llamemos x a la longitud del segmento MB e y a la longitud del segmento MC; aplicando Pitágoras a los triángulos rectángulos AMB y AMC, obtenemos:

Por Pitágoras:

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + y^2 \\ &= h^2 + (a-x)^2 \\ &= h^2 + a^2 + x^2 - 2ax \\ &= (h^2 + x^2) + a^2 - 2ax \\ &= c^2 + a^2 - 2ax \quad \text{(VII)} \end{aligned}$$

Pero como: $\frac{x}{c} = \cos\beta \rightarrow x = c \cdot \cos\beta$ y reemplazando x en (VII) resulta:

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac. \cos\beta$ Esta fórmula se denomina:

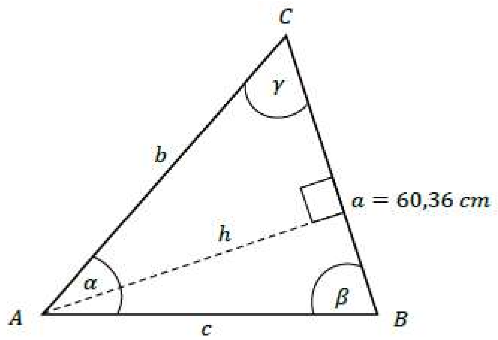
Teorema del coseno:

En todo triángulo, la longitud de uno ae sus lados elevada al cuadrado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de los mismos por el coseno del ángulo que forman.

Al tratar de resolver un triángulo pueden servir ambas fórmulas, pero una buena elección puede ahorrar mucho trabajo y producir menores errores de cálculo.

Además la elección de la fórmula depende mucho de los datos del triángulo que tengamos.

Ejemplo 1: Sabiendo que el lado $a = 60{,}36\ cm$, $\beta = 62°\ 26'$ y $\gamma = 70°\ 24'$ calcular las longitudes de los otros lados y el área del triángulo (ver figura siguiente)



Solución: Como $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, tenemos que $\alpha = 47°\ 10'$ y luego, usando la fórmula del teorema del seno, despejando y resolviendo:

$$b = \frac{a\ sen\ \beta}{sen\ \alpha} = 60{,}36 \cdot \frac{0{,}8865}{0{,}7333} \cong 72{,}96\ cm$$

$$c = \frac{a\, sen\, \gamma}{sen\, \alpha} = 60{,}36 \cdot \frac{0{,}94}{0{,}7333} \cong 77{,}54\, cm$$

Para calcular el área, si tomamos como base el lado a, entonces la altura es:
$h = b \cdot sen\, \gamma$

Luego
$$S = \frac{1}{2} ah = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot sen\, \gamma = \frac{1}{2} \cdot 60{,}36 \cdot 72{,}96 \cdot 0{,}94 \cong 2070\, cm^2$$

Ejemplo 2: Siendo: $a = 20$; $b = 30$ y $\gamma = 11°$, hallar los demás elementos del triángulo.

Solución: En este caso, conviene aplicar el teorema del coseno y así obtenemos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma = 400 + 900 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos 11° = 122{,}05$$

$$c = \sqrt{122{,}05} \cong 11$$

Para obtener las medidas de α y β empleamos nuevamente la expresión del teorema del coseno:

$$\cos \alpha = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} = \frac{(900 + 121 - 400)}{660} 0{,}94$$

Como $\cos \alpha > 0$, esto nos dice que α es un ángulo del primer cuadrante y por lo tanto,

$\alpha \cong 19°\, 47'42''$ con lo cual,

$\beta = 180° - (19°\, 47'42'' + 11°) = 149°\, 12'18''$

Para calcular β podríamos también usar:

$$\cos \beta = \frac{(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac} = \frac{(400 + 121 - 900)}{440} \cong -0{,}86$$

$arc \cos \beta \cong 149°\, 12'18''$

Lo que confirma nuestro cálculo anterior de β

Práctica del capítulo 5

Ejercicio 1: Complete el siguiente cuadro

Grados sexagesimales.	0			60		180	270	360
Radianes		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$			

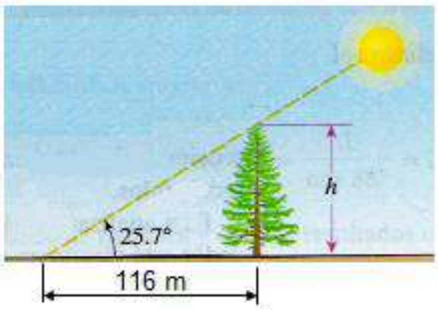
Ejercicio 2: ¿Cuántos grados sexagesimales equivalen a $\frac{3}{10}\pi$?

a. $93°$
b. $-27°$
c. $27°$
d. $54°$
e. $-56°$

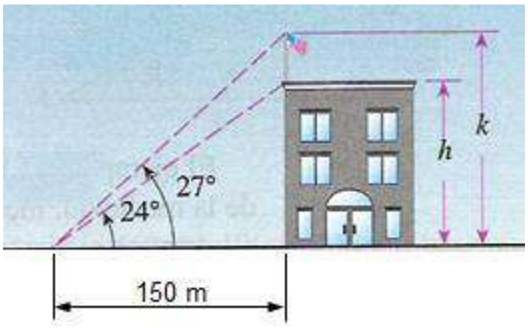
Ejercicio 3: ¿Cuántos grados sexagesimales equivalen a $\frac{\pi}{9}$ radiales?

a. $10°$
b. $20°$
c. $30°$
d. $57{,}3°$
e. $45°$

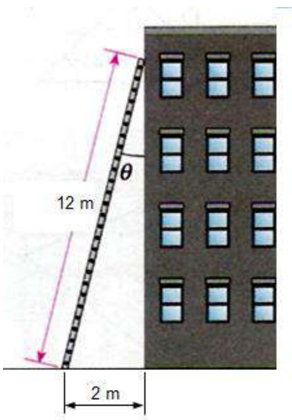
Ejercicio 4: Un pino gigante proyecta una sombra de $160\,m$ de largo. Determine la altura del árbol si el ángulo de elevación de Sol es de $25{,}7°$.Como muestra la siguiente figura.



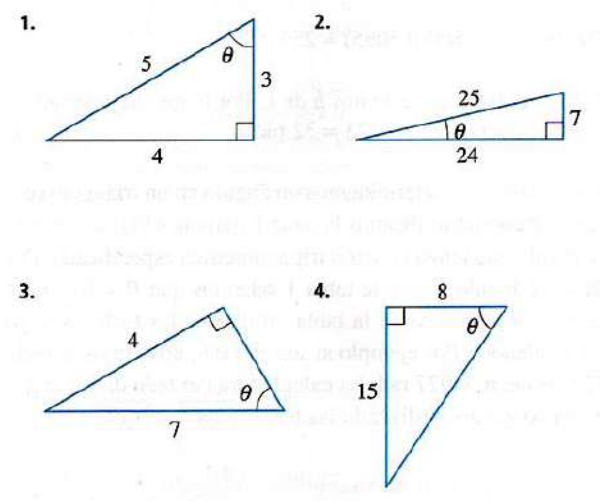
Ejercicio 5: Desde un punto sobre el suelo a $150\,m$ de la base de un edificio, se observa que el ángulo de elevación hasta la parte superior del edificio es de $24°$ y que el ángulo de elevación hasta la parte superior de la bandera del edificio es de $27°$ como muestra la figura. Determine la altura del edificio y la longitud del asta de la bandera.



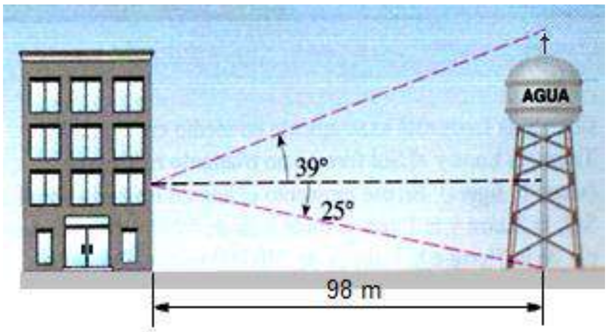
Ejercicio 6: Una escalera de $12\,m$ de largo está apoyada contra un edificio como muestra la figura. Si la base de la escalera está a $2m$ de la base del edificio, ¿cuál es el ángulo formado entre la escalera y el edificio?



Ejercicio 7: Determine los valores de las seis razones trigonométricas del ángulo θ en los siguientes triángulos:

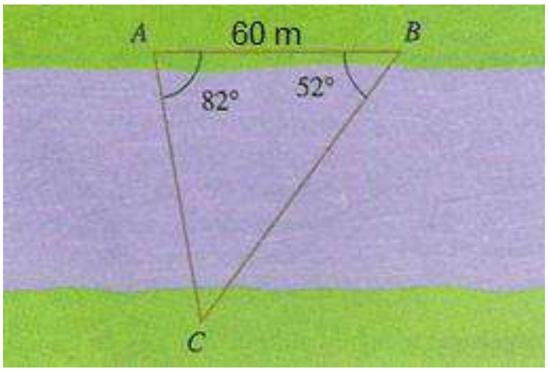


Ejercicio 8: Un depósito de agua está a $98\,m$ de un edificio (ver figura). Desde una ventana del edificio se observa que el ángulo de elevación hasta la parte superior del depósito es de $39°$ y el ángulo de depresión a la parte inferior es de $25°$.¿Cuál es la altura del depósito? ¿A qué altura está la ventana?



Ejercicio 9: Para encontrar la distancia de un lado al otro de un río, una topógrafa selecciona los puntos A y B que están separados $60\,m$ de un lado del río (ver figura). Entonces ella escoge un punto de referencia C del lado opuesto del río y determina que el ángulo $BAC \cong 82°$ y el ángulo $ABC \cong 52°$.

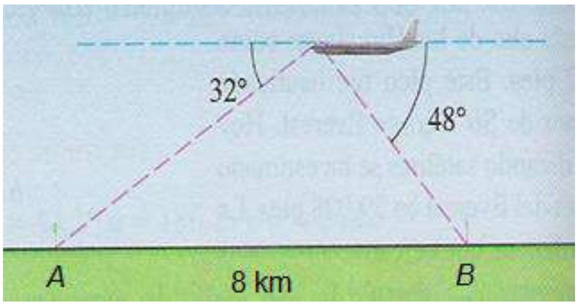
Calcule aproximadamente la distancia de A a C.



Ejercicio 10: Un piloto está volando sobre una ruta recta. Él encuentra que los ángulos de depresión a dos postes indicadores de kilómetros (Km.), a 8 km. de distancia entre sí tienen los valores de 32° y 48°, según se observa en la figura.

a. Determine la distancia del aeroplano al punto A.

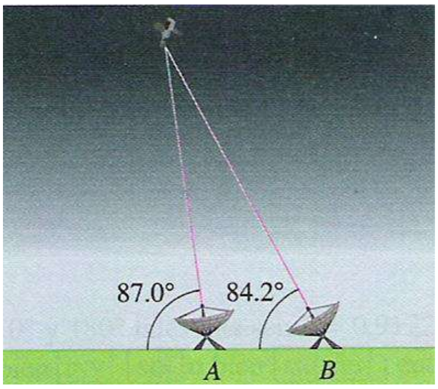
b. Determine la altitud del aeroplano.



Ejercicio 11: La órbita de un satélite alrededor de la Tierra, hace que pase directamente por encima de dos estaciones de rastreo que están separadas $80{,}5 km$. Cuando el satélite está entre las dos estaciones, se miden los ángulos de elevación desde A y desde B, y éstos son de 87° y 84.2°, respectivamente.

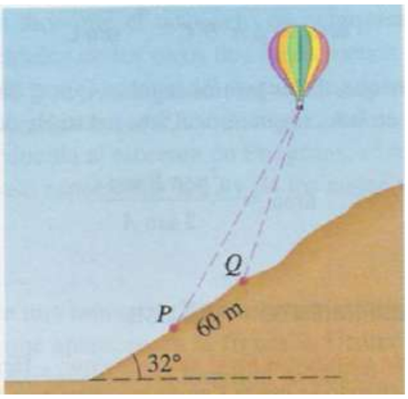
a. ¿A qué distancia está el satélite de la estación A?

b. ¿A qué altitud sobre el nivel del suelo está el satélite?

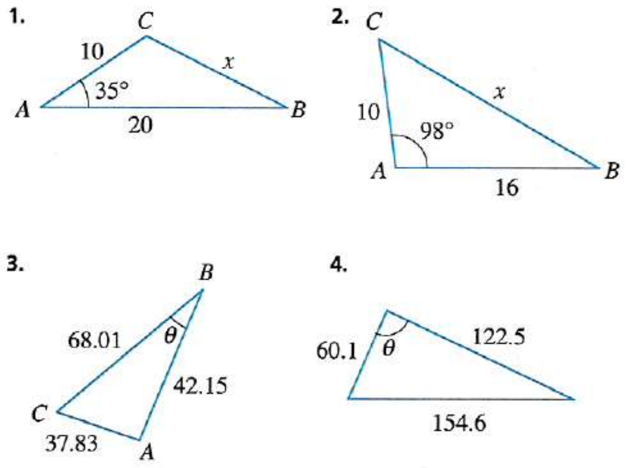


Ejercicio 12:

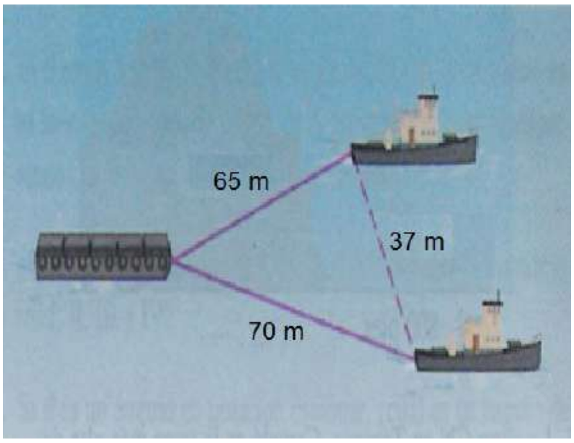
Los observadores P y Q están en la ladera de una colina que forma un ángulo con la horizontal de 32°. El observador en P determina que su ángulo de elevación a un globo aerostático es de 62°, en el mismo momento, el observador en Q mide su ángulo de elevación al globo y es de 71°. Si P está ubicado 60 m colina debajo de Q, determine la distancia de Q al globo.



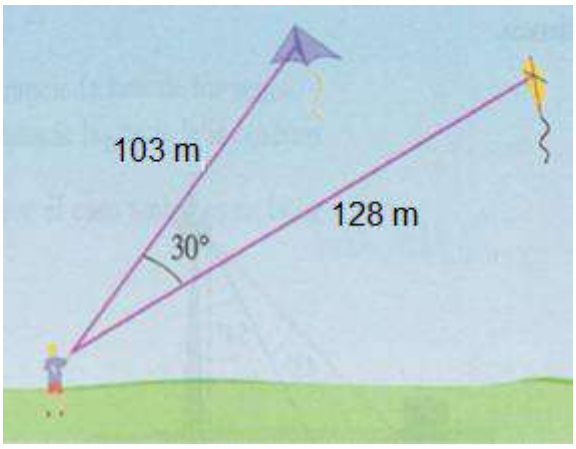
Ejercicio 13: Utilice la ley de los cosenos para determinar el lado indicado x o el ángulo θ en cada uno de los siguientes triángulos



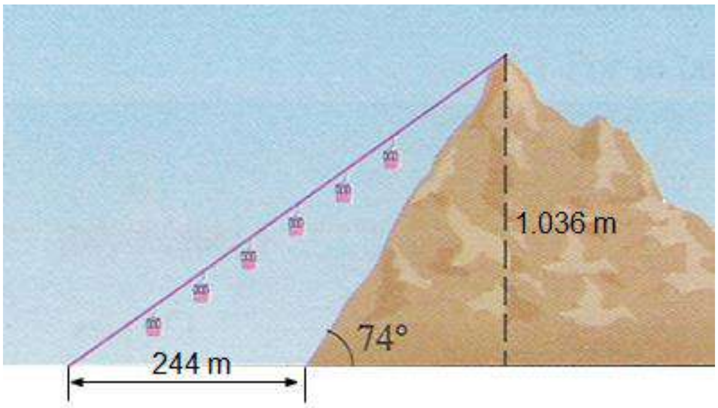
Ejercicio 14: Dos remolcadores que están separados $37\ m$ tiran de una barcaza, como se muestra. Si la longitud de un cable es de $65m$ y la del otro es de $70m$, determine cuál es el ángulo que forman los cables.



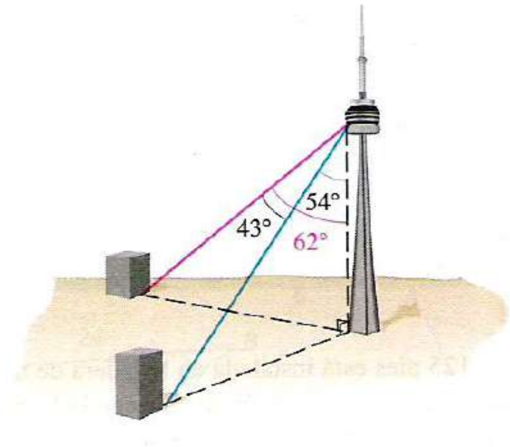
Ejercicio 15: Un niño está haciendo volar dos barriletes simultáneamente. Una de ellas tiene $103\ m$ de cordón y la otra $128\ m$. Se supone que el ángulo entre los dos cables es de $30°$.Estime la distancia entre los barriletes.



Ejercicio 16: Una montaña muy abrupta tiene una inclinación de $74°$ con la horizontal y se eleva $1.036\ m$ por encima del terreno circundante. Se debe instalar un funicular desde un punto a $244\ m$ de la base hasta la cima de la montaña tal y como se muestra. Determine cuál es la longitud más corta de cable necesario.



Ejercicio 17: La torre CN en Toronto, Canadá es la torre más alta del mundo. Una señora en la plataforma de observación a $350\ m$ sobre el nivel del piso desea determinar la distancia entre dos marcas sobresalientes sobre el piso. Observa que el ángulo entre las líneas de visión a estas marcas, es de $43°$, también observa que el ángulo entre la vertical y la línea de visión de una de las marcas es de $62°$, y a la otra es de $54°$. Determine la distancia entre las dos marcas sobresalientes.



6. BIBLIOGRAFÍA

Cadoche, L. y otros. (2004). *Matemática preuniversitaria*. Ediciones UNL.

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S. (2010). *Matemática. Funciones y nociones de trigonometría*. Santa Fe. Ediciones UNL

Haeussler, E., Paul, R. (2003). *Matemática para administración y economía*. Ed. Prentice – Hall. 10ª Ed.

Smith y otros. (1998). *Álgebra y trigonometría*. Ed. Addison - Wesley Longman

Stewart, J.,Redlin, L., Watson, S. (2005). *Precálculo*. Ed. Thomson. 3ªEd.

Facultad de Ingeniería .Universidad Nacional de la Patagonia San Juan Bosco. (2003). *Curso de apoyo en matemática*.

Facultad Regional Reconquista. Universidad Tecnológica Nacional. *Seminario de ingreso en Matemática*

UTN. Secretaría Académica. Rectorado. *Seminario Universitario – Matemática*.

UTN. Facultad Regional Santa Fe. (1987). *Curso de ingreso Matemática*

Se terminó de imprimir en
agosto de 2019