

JIT 2015

Identificación del Trabajo	
Área:	Estructuras y construcciones Civiles
Categoría:	Doctorando
Regional:	Regional Reconquista

Estática y dinámica de entramados utilizando series de potencias

Héctor Daniel MARTÍN

Calle 44 n° 1000, Reconquista, Facultad Regional Reconquista, UTN

E-mail de contacto: hmartin@frq.utn.edu.ar

Este trabajo es parte de la tesis doctoral que se realiza en la Universidad Nacional del Sur bajo la dirección del Dr. Carlos Filipich y el Ing. Mario Maurizi, en el marco del proyecto "Modelos Determinísticos, Estocásticos y Experimentales de Sistemas Mecánicos y Estructurales".

Resumen

El presente trabajo es parte de una tesis doctoral en donde se aborda el estudio de sistemas cerrados apertados planos por medio de series de potencias enteras. En los mismos se impone la automaticidad de las condiciones geométricas de continuidad y del equilibrio de esfuerzos característicos en los nodos, en los cuales acceden dos o más barras. Se estudia el comportamiento mecánico-estructural de los pórticos abiertos y cerrados, identificando las variables que influyen en las respuestas ante las acciones estáticas y dinámicas, luego el planteo y resolución de las ecuaciones gobernantes del problema, siempre dentro del encuadre adoptado por la Resistencia de Materiales clásica y orientado principalmente a la automatización de la herramienta. En el tratamiento del programa y en los estudios analíticos realizados se utilizó el programa de Matemática Simbólica Mathematica en su versión 10.

Palabras Claves: Series de Potencias, Estática y Dinámica, Entramados Planos.

1. Introducción.

En la resolución de los entramados, se aplica, tanto en el estudio dinámico como en el estático, lo que suele conocerse como condiciones de transferencia, es decir, la continuidad geométrica y el simultáneo equilibrio de los nudos, se consigue una particularidad muy destacable que es la reducción sustantiva del número de incógnitas a manejar [1-4]. En efecto, al aplicar las condiciones precitadas, se van resolviendo las distintas barras en un circuito seleccionado. Entonces se produce una economía de manipulación algebraica y correspondientemente una economía de tiempo computacional. Utilizando esta técnica, se resuelven los entramados cuando los mismos se encuentran sometidos a esfuerzos aplicados o desplazamientos de vínculos. Estos esfuerzos pueden ser cargas verticales u horizontales en los nodos, momentos aplicados en los nodos, o bien cargas distribuidas transversales y/o axiales a lo largo de las barras. Éstas cargas distribuidas pueden tener cualquier función en su variación (constante, polinómica, trigonométrica, etc...), ya que se hará un desarrollo en series de la carga aplicada. Como salida del programa elaborado, se muestran las funciones de los desplazamientos axiales y transversales, los esfuerzos de corte y normales, además de los diagramas de momentos. El número total de incógnitas es muy bajo y, en general,

depende de la cantidad de vínculos a tierra y del número de barras que llegan a cada uno de los nodos.

En el problema de la búsqueda de frecuencias naturales de un entramado, la ecuación corresponderá a la nulidad de un determinante característico que es función no lineal de las mismas. Sin embargo, el orden de dicho determinante será siempre relativamente muy pequeño respecto al hallado por métodos tradicionales (por ejemplo MEF) donde la ecuación característica corresponde al problema lineal clásico de autovalores, pero el orden de la matriz es, en general, notablemente superior al que nos ocupa.

2. Metodología.

Imponiendo el cumplimiento de los sistemas diferenciales se sistematizan los algoritmos de recurrencia al utilizar los desarrollos en series de potencias en la resolución de las ecuaciones diferenciales. El problema de vibraciones naturales de pórticos es de tipo lineal y para resolverlo, habitualmente, se divide cada tramo en elementos con aproximación algebraica. Con el fin de obtener mayor precisión, normalmente, se aumenta el número de elementos y consecuentemente el número de incógnitas. El uso de series de potencias para simular la forma modal de cada tramo sin aproximaciones, es decir con precisión arbitraria, tiene la ventaja que sólo exige en nodos de tramos consecutivos la continuidad estática y geométrica [1-3].

En la Figura 1 se muestra un pórtico plano cerrado, ubicado en un sistema de coordenadas de referencia X-Y

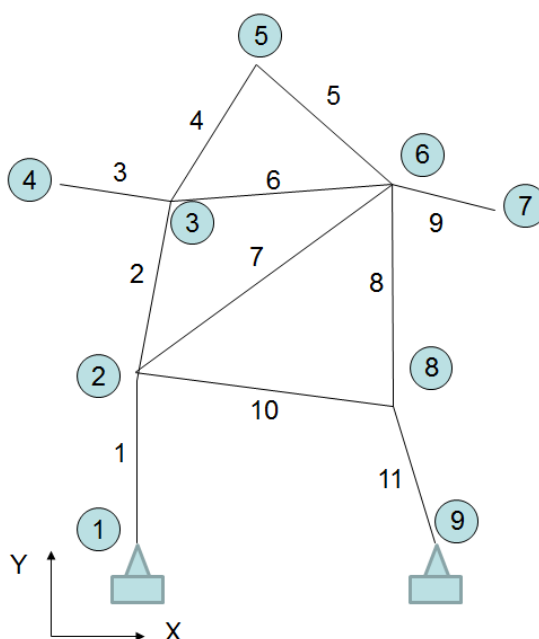


Figura 1. Esquema general de un pórtico en estudio

Para el estudio energético se considera en cada barra j un sistema de coordenadas local en donde cada punto, al vibrar, tendrá un desplazamiento transversal y un desplazamiento axial, como se muestra en la Figura 2.

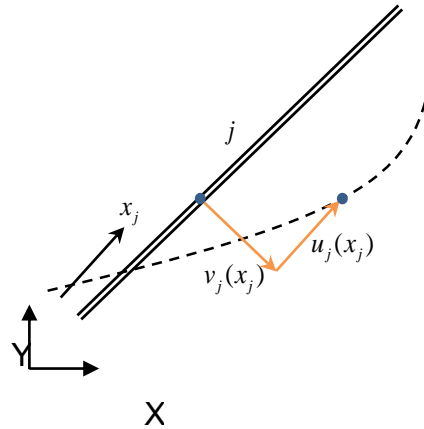


Figura 2. Desplazamientos y coordenadas locales de cada barra j .

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema dinámico de la barra j son las indicadas en (1) y (2).

$$E_j J_j v_j''''(x_j) - \rho_j F_j \omega^2 v_j(x_j) = 0 \quad (1)$$

$$E_j F_j u_j''(x_j) + \rho_j F_j \omega^2 u_j(x_j) = 0 \quad (2)$$

En las cuales, ω es la frecuencia de vibración del entramado y el subíndice j indica el número de la barra cuyas constantes características son las siguientes:

E es el Módulo de Young,

ρ es la densidad,

F es el área,

J es el Momento de Inercia,

v y u son las funciones correspondientes a los desplazamientos transversal y axial.

Se propone, para la solución de las ecuaciones diferenciales, un desarrollo en series de potencias para las funciones desconocidas de los desplazamientos transversales y axiales de cada barra, con las siguientes expresiones:

$$v_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m A_{j,i} \xi_j^i \quad u_j(\xi_j) = \sum_{i=0}^m B_{j,i} \xi_j^i \quad (3a, b)$$

Éstas, al reemplazarlas en las ecuaciones diferenciales convenientemente adimensionalizadas, lleva a las ecuaciones de recurrencia:

$$A_{j,i+4} = \frac{\Omega_j^2 A_{j,i}}{\varphi_{4,i}} \quad B_{j,i+2} = - \left(\frac{\Omega_j}{\lambda_j} \right)^2 \frac{B_{j,i}}{\varphi_{2,i}} \quad (4a, b)$$

En las cuales:

$$\varphi_{k,i} = \frac{(i+k)!}{k!} \quad \Omega_j^2 = \frac{\rho_j F_j}{E_j J_j} \omega^2 a_j^4 \quad (4c, d)$$

$$\xi_j = \frac{x_j}{a_j} \quad \lambda_j^2 = \frac{F_j a_j^2}{J_j} \quad (4e, f)$$

En cada nodo, en donde concurren más de una barra, se realizan condiciones de compatibilidad geométrica, esenciales o primarias, y con condiciones estáticas de equilibrio, naturales o de segundo orden. De esta manera, se va recorriendo el entramado según un camino previamente establecido. Las barras van obteniendo los coeficientes de los desarrollos en serie en función de las barras anteriores en el camino. En los casos de arribar a nodos en que las barras traigan datos, se realizan las ecuaciones de compatibilidad geométrica junto con las ecuaciones estáticas. Los resultados de estas ecuaciones son los que resuelven el problema finalmente.

Para el caso del problema de la estática, las ecuaciones diferenciales gobernantes son las siguientes:

$$E_j J_j v_j''''(x_j) - q_j(x_j) = 0 \quad (5)$$

$$E_j F_j u_j''(x_j) + p_j(x_j) = 0 \quad (6)$$

En donde $q(x)$ y $p(x)$ son las expresiones de los polinomios que representan las cargas transversales y axiales para cada barra. En caso de ser funciones trascendentes, es necesario previamente hacer los desarrollos en serie para cargar los datos. Las cargas puntuales, sean esfuerzos verticales, horizontales o momentos aplicados, se deben colocar en nodos. En caso de necesitar una carga puntual en medio de una barra, se coloca un nodo en su ubicación dividiendo la barra original en dos barras.

Las expresiones de recurrencia para el caso del estudio estático son las siguientes:

$$A_{j,i+4} = \frac{q_{j,i}}{J_{4,j} \varphi_{4,i}} \quad B_{j,i+2} = - \frac{p_{j,i}}{F_{2,j} \varphi_{2,i}} \quad (7a, b)$$

En el estudio completo se han considerado diferentes vinculaciones a tierra, como ser empotramiento, cuasiempotramiento, extremos libres, articulaciones simples y dobles. También se tienen en cuenta los vínculos elásticos a tierra. Además se permite que las barras, en uno o ambos extremos estén articuladas al entramado. Se han estudiado también los diferentes cedimientos en los vínculos, ya sea vertical, horizontal o giro.

A los fines de corroborar la eficiencia del método propuesto, se ha elaborado un programa utilizando el software de matemática simbólica Mathematica [5] en su versión 10. En la versión completa, muchos de los ejemplos han sido tomados del libro Valerian Leontovich [7].

3. Resultados.

Se presenta la resolución de dos pórticos, uno para el estudio dinámico (Figura 3), y otro para la estática (figura 5). Es posible elegir barras con diferentes características geométricas y físicas, pero para simplificar el ingreso de datos, se adoptan todas las barras iguales, de sección uniforme $F=0.12 \text{ m}^2$ con Módulo de Elasticidad $E=2.1 \times 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$, peso específico $\rho=7850 \text{ Kg.m}^{-3}$ y momento de inercia $J= 0.0036 \text{ m}^4$. Las longitudes de las barras se toman en metros. Se pueden utilizar diferentes vinculaciones a tierra, en este primer ejemplo solo se muestra un pórtico empotrado en los nodos 1 y 6.

Los resultados de las frecuencias naturales del entramado que se han obtenido se muestran en la Tabla I, en donde se utilizan desarrollos en Series de Potencias de grados 10, 15 y 20. Se comparan además con los resultados obtenidos utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [6].

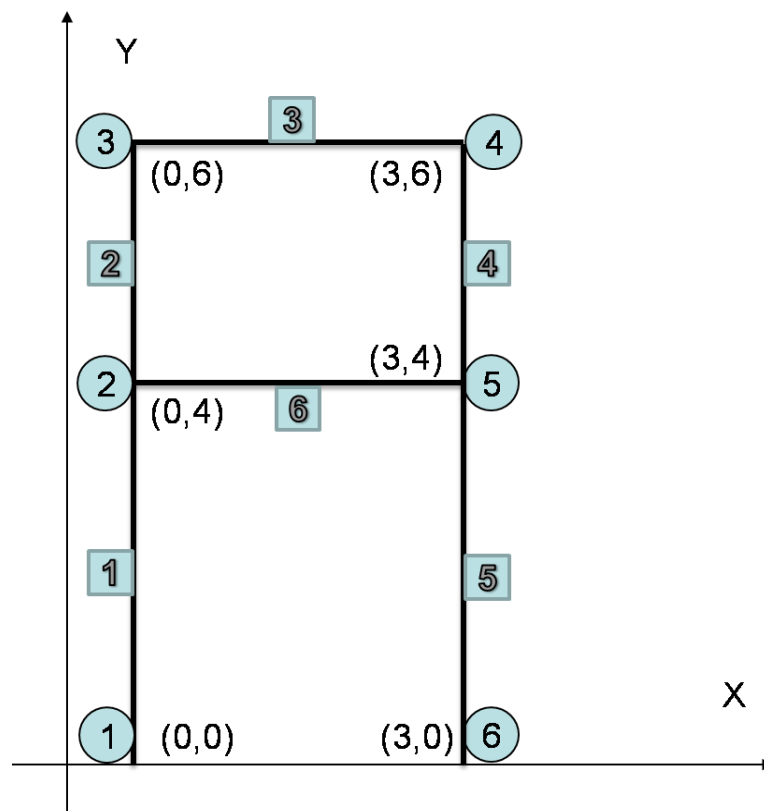


Figura 3. Entramado para el estudio dinámico, con empotramientos en los nodos 1 y 6.

Tabla I. Valores de las frecuencias naturales del entramado.				
Modo	Series de Potencias			MEF Algor
	10	15	20	
1	124.015	124.030	124.030	124.002
2	592.200	603.611	603.609	603.581
3	879.876	906.325	906.305	906.620
4	920.177	1006.790	1006.700	1006.810
5	1225.700	1234.400	1234.580	1233.550
6	2377.430	1339.590	1340.720	

Se muestra finalmente en la Figura 4, las primeras 3 formas modales del pórtico biarticulado, obtenidas utilizando 10 elementos por barra en el Software Algor [6].

Utilizando la metodología propuesta en este trabajo, la resolución de este entramado se realiza con un sistema lineal que posee solamente 9 incógnitas. En las resoluciones con el Método de Elementos Finitos, se han utilizado elementos viga, los cuales se le ha restringido el movimiento fuera del plano, que conduce a elementos con seis grados de libertad. Si se divide a cada barra en 10 elementos, para lograr buenos resultados, el sistema lineal posee 180 incógnitas.

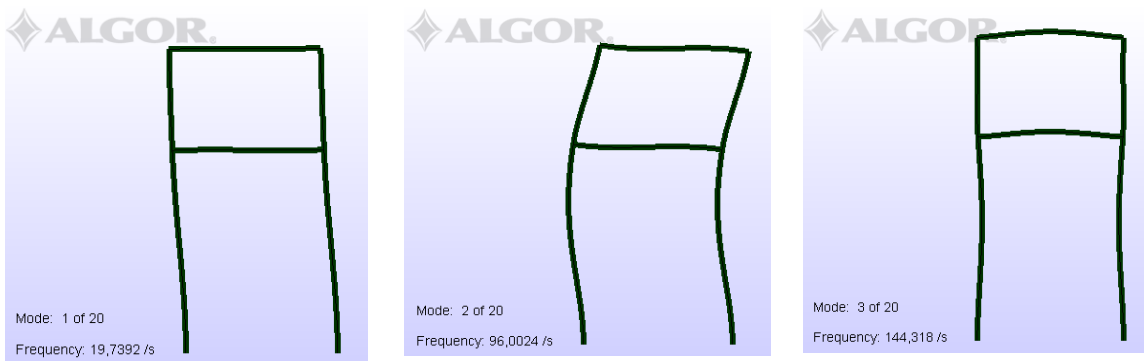


Figura 4. Primeras 3 formas modales obtenidas con Algor.

A continuación se muestra un entramado cerrado de mayor complejidad, en el cual existen vinculaciones internas al pórtico. En este caso se realiza el cálculo de la estática del mismo. Se trata de una estructura de geometría simétrica con 3 tensores (barras 9, 10 y 11) con una carga puntual vertical P de 10.000 N en el nodo 5, como se muestra en la Figura 5. Se han adoptado los mismos valores que en el ejemplo 1 para los materiales y geometría de las barras. Los resultados, para este entramado, son comparados con los obtenidos a utilizar el programa de elementos finitos Algor [6].

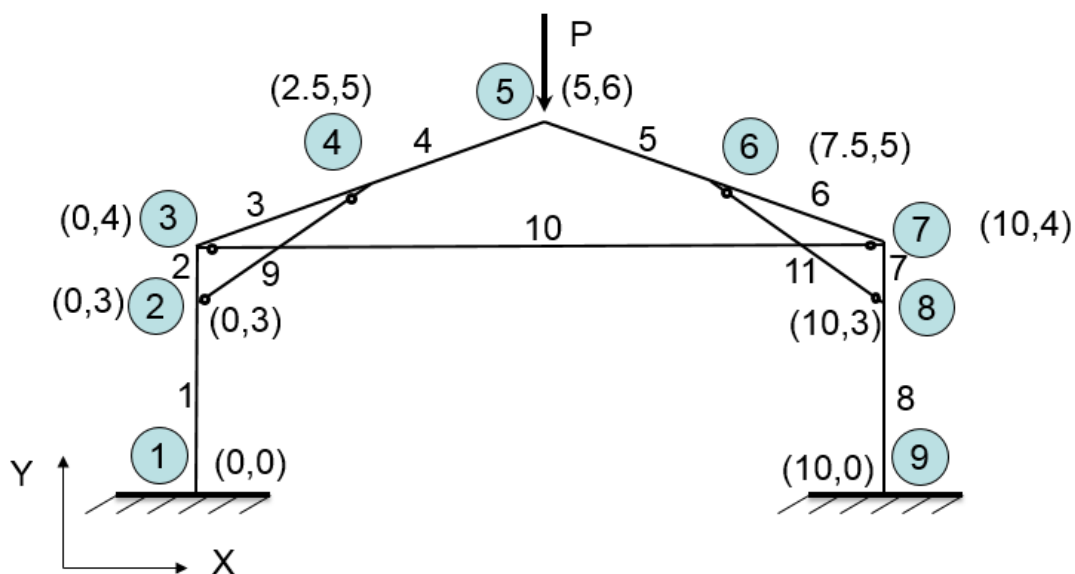


Figura 5. Entramado de 11 barras empotrado en los nodos 1 y 9, con las barras 9, 10 y 11 articuladas internamente al pórtico.

En la Figura 6 se muestran los diagramas de Momentos obtenidos mediante el desarrollo en Series de Potencias, comparado con los que produce el programa de Elementos Finitos Algor [6]. Los valores de los momentos en algunos de los nodos se presentan en la

Tabla II, también se muestran valores de esfuerzos de Corte y Normales en las diferentes barras, en Tabla III, que se observan esquemáticamente en la Figura 7.

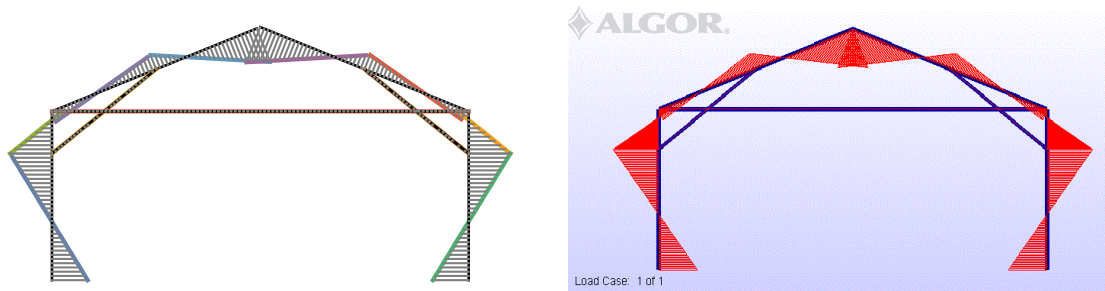


Figura 6. Gráficos de Momentos obtenidos con el programa, comparados con los calculados con el Método de Elementos Finitos, Algor [6].

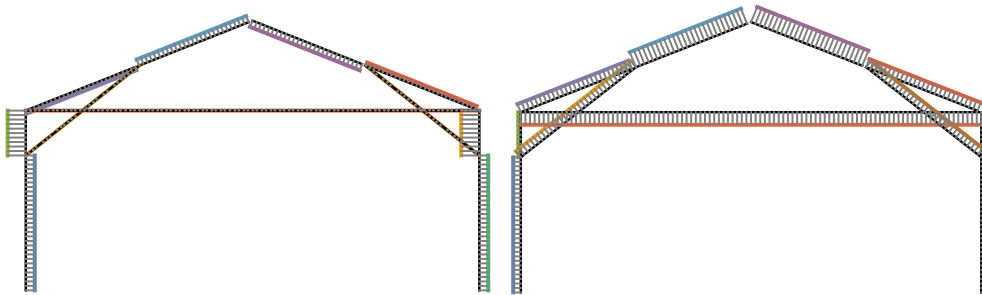


Figura 7. Gráficos de Esfuerzo de Corte y Normales obtenidos con el programa

Tabla II: Valores de Momentos en nodos obtenidos al analizar el pórtico con Series se Potencias, comparados con los obtenidos en con Algor [6].			
Nodo	Esfuerzo	Series	MEF Algor [6]
1 y 9	Momento (Nm)	1876,68	1876,676
2 y 8	Momento (Nm)	2183,83	2183,826
3 y 7	Momento (Nm)	565,376	565,376
5	Momento (Nm)	1957,62	1957,622

Tabla III: Valores de Cortes y Normales en barras obtenidos al analizar el pórtico con Series se Potencias, comparados con los obtenidos en con Algor [6].			
barra	Esfuerzo	Series	MEF Algor[]
9 y 11	Normal (N)	5254,02	5254,022
10	Normal (N)	8399,02	8399,024
9, 10 y 11	Corte (N)	0	0
1 y 8	Corte (N)	1353,5	1353,5
2 y 7	Corte (N)	2749,2	2749,2

4. Conclusiones.

El método propuesto mediante los desarrollos en series de potencias, además de conducir a una solución exacta, cuando se lleva el orden del polinomio a infinito, reduce considerablemente el número de incógnitas en la resolución. Para el caso presentado en el primer pórtico de 6 barras, por ejemplo, se lo resuelve utilizando solamente 9 incógnitas, siendo que al calcularlo utilizando el Método de los Elementos Finitos, con 10 elementos por barra conduce a 180 incógnitas en total. En el segundo ejemplo, se resuelve con 15 incógnitas utilizando series, en caso de la verificación con MEF, con 10 elementos viga por barra, en cada nodo habrá 3 incógnitas, lo que resulta un total de 330 incógnitas. Con la presente metodología es posible también el estudio de los marcos cerrados.

Es importante destacar que una de las grandes ventajas del método es que permite colocar en las barras cargas que respondan a cualquier función, ya sea lineal, polinómicas o trigonométricas, éstas últimas se las ingresa en su desarrollo en series de Taylor.

En la actualidad se está culminando con el estudio de segundo orden, de manera que el programa elaborado también podrá dar los valores de las cargas críticas de la estructura.

Bibliografía.

- [1] Filipich C. P., Escalante M. R., et al. (2003). Series de potencias: una ventajosa alternativa aplicada a vibraciones libres de pórticos. ENIEF 2003. Mecánica Computacional. Bahía Blanca.
- [2] Escalante M. R. (2008) "Series de potencias y descomposición ortogonal propia aplicados a la dinámica de cadenas y cables poco tensos", Tesis doctoral. Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca.
- [3] Bambill E. A., Filipich C. P. (2004) "Inestabilidad del equilibrio en pórticos planos abiertos atensorados uso sistemático de series de potencias" Congreso: Mecánica Computacional Vol. XXIII G. Buscaglia, E. Dari, O. Zamonsky (Eds.) Bariloche, Argentina.
- [4] Hildebrand, F.B. (1968). *Methods of Applied Mathematics*. Prentice Hall of India. Private Ltd. N. Delhi.
- [5] Programa: Wolfram Mathematica © (1988-2014), Wolfram Research inc. Version n° 10.
- [6] Programa: Algor FEMPRO, Copyright © (2009). Versión 23.1
- [7] Leontovich, V. Capítulos 2 al 6 del libro: *Pórticos y Arcos, soluciones condensadas para el análisis estructural*. Compañía editorial continental, S.A. México-España. Tercera Edición en español.